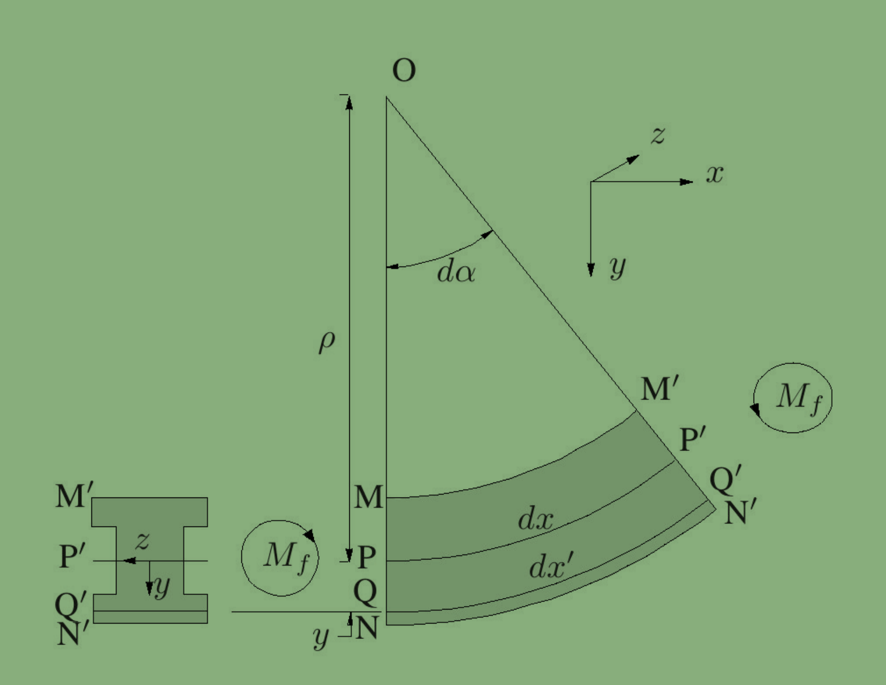
APUNTES DE ELASTICIDAD PARTE I

por

AGUSTÍN MARTÍN DOMINGO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-10-04

APUNTES DE ELASTICIDAD
PARTE I

por

AGUSTÍN MARTÍN DOMINGO

CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE*

ARQUITECTURA

DE MADRID

3-10-04

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Apuntes de Elasticidad. Parte I

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 367.01 / 3-10-04
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-413-4
ISBN-13: 978-84-9728-414-1
Depósito Legal: M-9395-2012

Capítulo 1
Introducción al sólido deformable.

1.1. Introducción.

1.1.1. Algunas diferencias entre líquidos y sólidos.

En temas anteriores se ha estudiado como se transmiten las fuerzas en líquidos, y cual es la energía necesaria para deformar un líquido. Se ha visto que esta energía depende solamente del cambio de volumen producido en el líquido. Los líquidos se resisten a cambiar de volumen, pero no de forma.

En el caso de los sólidos nos encontramos conque éstos se resisten a cambiar tanto de volumen como de forma. Así, la energía de deformación de un sólido depende tanto de la variación de volumen como de la variación de forma.

Asimismo, se ha visto que en el caso de los líquidos, para un punto determinado, la fuerza por unidad de superficie sobre una pequeña superficie en torno a ese punto es la misma con independencia de la orientación de la superficie (*principio de Pascal*), y es siempre perpendicular a la pared del recipiente (en general perpendicular a la superficie sobre la que se ejerce la presión). Al no haber fuerzas tangenciales no hay resistencia del líquido a cambiar de forma (en condiciones de equilibrio, ya que en condiciones de no equilibrio en fluidos reales aparecen fuerzas tangenciales y es necesario tener en cuenta el efecto de la viscosidad).

Por el contrario, la fuerza transmitida a través de una superficie en un sólido depende de la orientación de ésta, y es en general distinta para direcciones distintas. Las fuerzas internas por unidad de superficie que aparecen en cada punto de un cuerpo que está siendo deformado, y que actúan a través de una superficie genérica que pasa por el mismo se denominan *tensiones elásticas* y pueden tener cualquier dirección con respecto a la superficie sobre la que actúan, en vez de ser perpendiculares a las superficies como ocurría en el caso de los líquidos en reposo.

En un líquido no hay fuerzas actuando sobre puntos aislados. Las fuerzas que actúan sobre un líquido son siempre bien fuerzas de masa como la fuerza gravitatoria, o bien fuerzas que actúan a través de una superficie, como la fuerza ejercida sobre el líquido por la pared del recipiente. En cambio, sobre un sólido las fuerzas pueden actuar sobre puntos aislados (en realidad sobre pequeñas superficies) o sobre superficies extensas, pueden proceder de las ligaduras (p. ej. de los apoyos) o de causas externas (p. ej. fuerzas de masa), pueden ser de superficie (p. ej. la ejercida por un líquido sobre la pared del recipiente) o de volumen (p. ej. la fuerza gravitatoria). En general, las fuerzas que impiden o dificultan la deformación o ruptura de un sólido son debidas a la atracción entre los átomos y tienen un pequeño radio de acción.

1.1.2. Algunas diferencias entre un sólido rígido y un sólido deformable.

El *sólido rígido* es un modelo simplificado de sólido que correspondería a un hipotético sólido que fuera perfectamente no deformable (y por tanto la distancia entre dos puntos cualesquiera del mismo se mantendría invariable). En un sólido rígido, las fuerzas externas aplicadas no se transmitirían hacia su interior† y por tanto no se produciría deformación ni interior ni exterior en dicho sólido rígido. Si el sistema de fuerzas es tal que el sólido rígido no está en equilibrio mecánico éste se moverá, pero sin deformación. Por el contrario, cuando tratamos con un sólido real, es decir, con un *sólido deformable*, las fuerzas externas aplicadas darán lugar a una distribución de fuerzas internas a través de cada superficie imaginaria en el interior del sólido deformable, produciéndose deformaciones (en general no nulas) en todo el mismo. Obviamente, si el sólido deformable está en reposo la suma de todas estas fuerzas internas y de las fuerzas externas actuando sobre cada elemento de volumen del mismo debe ser nula.

Al igual que en el caso de los líquidos, hay una interacción entre la materia que se encuentra a un lado y a otro de cualquier superficie imaginaria. Supongamos un cuerpo que se encuentra en estado de equilibrio elástico, sometido a un conjunto de fuerzas sobre su superficie exterior, al que de forma imaginaria dividimos en dos partes I y II mediante una superficie imaginaria de separación.

Cada una de estas partes imaginarias deberá seguir por separado en equilibrio bajo la acción de las fuerzas externas localizadas en ella (que ya actuaban originalmente) y un sistema de fuerzas actuando a través de la superficie de separación que

† Las fuerzas equivalentes sobre puntos o superficies del interior que a menudo se utilizan al analizar el equilibrio de partes de ese hipotético sólido rígido son fuerzas equivalentes, no fuerzas reales aplicadas en el interior del sólido rígido.

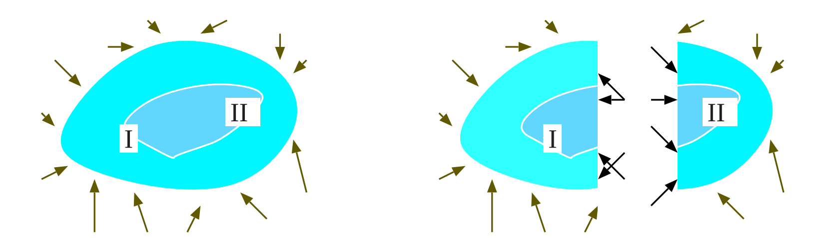


Figura 1–1: Fuerzas internas en un sólido deformable. Si llevamos a cabo un corte imaginario del sólido, el sistema real de fuerzas ejercido a través de esa superficie por una parte del material sobre la otra y viceversa deberá ser tal, que, al hacer el corte cada uno de los subsistemas esté en equilibrio mecánico.

equivalga al efecto del conjunto de fuerzas ejercido por la otra parte sobre la parte considerada, antes de la separación.

El *principio de acción y reacción* impone que la fuerza total ejercida por la parte I sobre la II sea igual en magnitud y de sentido contrario a la ejercida por la II sobre la I. Se denomina *esfuerzo* a la interacción mecánica entre las dos partes del elemento a través del corte.

1.1.3. Algunos postulados implícitos.

En el apartado anterior ya tuvimos en cuenta algunas cosas que ahora mencionaremos de forma explícita. En todo lo que sigue al hablar de fuerzas y deformaciones elásticas en un sólido, consideraremos implícitamente los siguientes postulados:

1. **Principio de continuidad**: Al igual que en los líquidos, para el estudio del problema elástico podemos considerar la materia continua. Las fuerzas elásticas en la materia se representan mediante funciones continuas del punto y de la orientación del plano a través del cual se mide la fuerza. Es decir, no se tiene en cuenta la estructura atómica ni granular discreta de la materia, ya que desde el punto de vista práctico los granos de que están compuestos la mayor parte de los materiales son mucho menores que las dimensiones de los mismos. En materiales no granulares como la madera esta suposición es aún más válida, ya que las distancias interatómicas son mucho menores que las dimensiones de las piezas reales.

2. **Igualdad de acción y reacción**: A través de una superficie imaginaria cualquiera del interior del sólido la fuerza ejercida por una parte sobre la otra es igual y de sentido contrario a la que ejerce la otra sobre la una, como se ve en la figura 1–1. Esto no es más que una extensión de la tercera ley de Newton a las fuerzas elásticas que se ejercen en el interior de un cuerpo entre distintas partes del mismo.

3. **Principio de equilibrio**: Las ecuaciones de equilibrio (estático o dinámico) de un sólido rígido son aplicables a cualquier elemento del cuerpo, siempre que se tenga en cuenta la acción de las fuerzas elásticas ejercidas por el resto del cuerpo sobre el elemento en cuestión. Esto no es más que una extensión de la segunda ley de Newton al caso de fuerzas elásticas en el interior de un cuerpo.

1.2. Sistemas elementales de fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Esfuerzos.

El sistema real de fuerzas que actúa sobre un cuerpo (y que da lugar a un estado de tensiones, con sus deformaciones y en el caso extremo, roturas) es en general complejo, combinación de una serie de fuerzas y sistemas de fuerzas más simples o elementales que se estudiarán individualmente. Estos sistemas simples de fuerzas son los siguientes:

Tracción: Por ejemplo, la que aparece en un cable. En este caso, el sistema de fuerzas está compuesto por dos fuerzas iguales y de sentido contrario, aplicadas sobre la misma línea de acción, de forma que dan como consecuencia un alargamiento.

Compresión: Por ejemplo, la que aparece en columnas o pilares. En este caso, el sistema de fuerzas está compuesto por dos fuerzas iguales y de sentido contrario, aplicadas sobre la misma línea de acción, de forma que dan como consecuencia un acortamiento.

Cortante: Corresponde a la forma de trabajo de una cizalla (máquina de cortar chapas o perfiles metálicos). Se la conoce también como tensión de cizalladura o de cizallamiento o tensión tangencial. En este caso, el sistema de fuerzas está compuesto como antes por dos fuerzas iguales y de sentido contrario, pero aplicadas sobre líneas de acción paralelas entre sí.

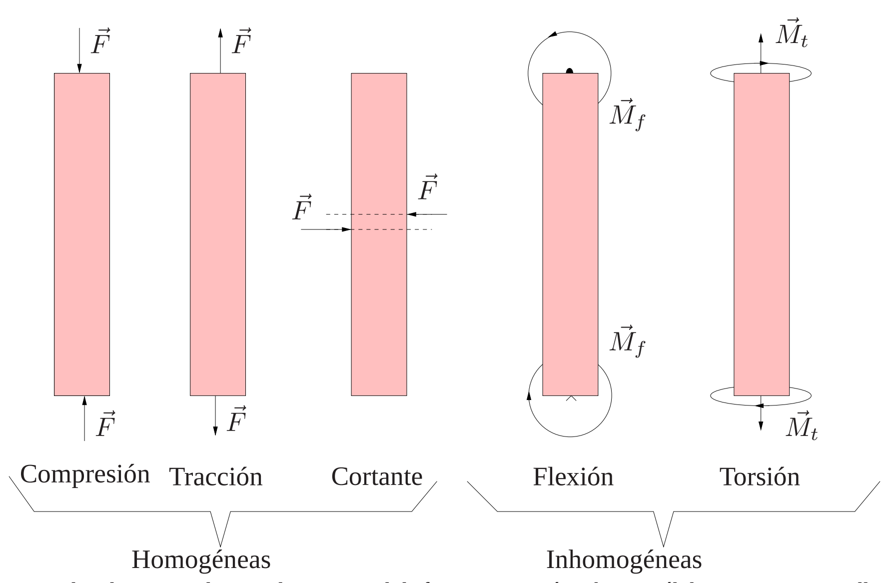


Figura 1–2: Para facilitar su estudio, descompondremos el sistema real de fuerzas que actúa sobre un sólido en sistemas sencillos. En la figura se muestran distintos tipos de sistemas elementales de fuerzas que actúan sobre sólido, dando lugar su superposición al sistema de fuerzas complejo que en realidad actúa sobre el mismo.

Flexión: Aparece, por ejemplo, en una viga cargada. En este caso, el sistema está compuesto por dos subsistemas de fuerzas, cada uno de ellos dando una fuerza total resultante cero y momentos resultantes iguales y de sentido contrario (momento total resultante nulo), aplicados en líneas de acción distintas, pero paralelas.

Torsión: Es la deformación que corresponde a retorcer una pieza. Igual que en el caso de la flexión, el sistema está compuesto por dos subsistemas de fuerzas, cada uno de ellos dando una fuerza total resultante cero y momentos resultantes iguales y de sentido contrario (momento total resultante nulo), pero ahora aplicados en la misma línea de acción.

Tanto la tracción como la compresión y el cortante están causados por fuerzas “simples”, iguales y opuestas (para una pieza alargada, paralelas al eje en los dos primeros casos y perpendiculares en el tercero). Por el contrario, tanto la flexión como la torsión están causadas por pares de fuerzas, con momentos paralelos o perpendiculares al eje, según de cual se trate, e iguales y de sentidos opuestos.

Hay un concepto muy importante que ya hemos introducido y sobre el que insistiremos, el concepto de *esfuerzo*. Si tomamos un plano imaginario dentro de un cuerpo tensionado, se denomina esfuerzo a la interacción mecánica entre las dos partes del cuerpo a través del plano debido al sistema de fuerzas que actúa a través del mismo. Así, hablaremos de esfuerzo cortante como una pareja de cortantes T, de esfuerzo axil como una pareja de axiles (o normales) N, de esfuerzo flector como la pareja de distribuciones de fuerzas que dan una pareja de momentos flectores M_f y esfuerzo de torsión como la pareja de distribuciones de fuerzas que dan una pareja de momentos de torsión M_t. Todos ellos se entienden como el conjunto de acciones mecánicas de cada tipo a través del plano, con las parejas de acciones que ejerce una parte sobre la otra y la otra sobre la una. Las tensiones elásticas que veremos enseguida están relacionadas con el concepto de esfuerzo y no con el de fuerzas aisladas, y su distribución se utiliza para caracterizar el esfuerzo a través de un plano en un punto del medio tensionado.

Se dice que un esfuerzo axil es positivo si corresponde a la acción de fuerzas de tracción, mientras que se dice que es negativo si corresponde a fuerzas de compresión. Asimismo se dice que un esfuerzo de torsión es positivo si los momentos de torsión correspondientes apuntan hacia fuera del elemento (como en el caso de la figura 1–2) y se dice que es negativo en caso contrario.

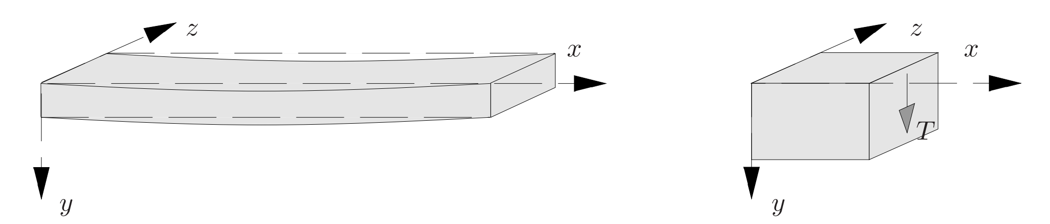


Figura 1–3: Convenio de signo positivo para los esfuerzos flectores y cortantes.

Para poder dar sin ambigüedad un signo a un esfuerzo flector o a un esfuerzo cortante es necesario tener definido un sistema de ejes, como los que se muestran en la figura ya que, como se verá más adelante, el esfuerzo cortante a través una sección estará relacionado con la distribución de esfuerzos flectores a lo largo de las distintas secciones.

Es costumbre tomar el valor positivo del esfuerzo flector cuando éste produce una flexión hacia abajo como se muestra en la parte izquierda de la figura 1–3. Con el sistema de ejes que se muestra en la figura esto implica que la flecha producida tiene lugar en el sentido positivo del eje y. Asimismo consideraremos que el esfuerzo cortante es positivo cuando tiene el sentido que se muestra en la parte derecha de la figura 1–3 respecto del sistema de ejes. Es importante ser riguroso en la relación entre los signos ya que en caso contrario la relación entre el esfuerzo cortante y la variación del esfuerzo flector cambiaría de signo. Por ello, si el eje que marca la dirección de la flecha no está dirigido hacia abajo, seguiremos el criterio del eje a la hora de decidir el signo del esfuerzo flector aunque eso implique que un esfuerzo flector positivo no corresponda a un desplazamiento hacia abajo. Sin embargo, sería conveniente considerar un cambio del sistema de ejes para evitar confusiones.

En este capítulo intentaremos trabajar con signos explícitos tanto para las fuerzas asociadas a cada esfuerzo como para los momentos del sistema de fuerzas que actúan sobre cada superficie. A través del convenio de signos que acabamos de establecer podemos relacionar los signos de estas fuerzas y de estos momentos con los esfuerzos cortante y flector correspondientes.

1.3. Rango de validez.

1.3.1. Elasticidad y plasticidad.

El comportamiento de los materiales al ser sometidos a tracción depende de la magnitud de la fuerza de tracción. En un ensayo a tracción típico, se coloca una pieza de acero u otro material en una máquina en la que ésta es traccionada lentamente, apuntándose durante el proceso las lecturas de la fuerza de tracción y del cambio de longitud (elongación).

Para un material deformable genérico, se pueden presentar una serie de etapas en su comportamiento. Por ejemplo, en la figura 1–4 se muestra un detalle de las primeras etapas del proceso y del comportamiento de un material dúctil. En la figura 1–5 se muestra el comportamiento de un acero típico y el del hierro colado (el hierro templado es más quebradizo y se rompe a poco de salir de la zona lineal). Discutiremos las distintas etapas sobre el diagrama tensión deformación del acero que se muestra en la figura 1–5, ya que ahí se aprecian bien muchos de los comportamientos que queremos destacar,

Región OA: Para pequeñas fuerzas aplicadas, se tiene una primera región de comportamiento lineal (alargamiento linealmente proporcional a la fuerza aplicada). En esta zona lineal se tiene un comportamiento elástico, es decir, al cesar la fuerza de tracción, el material recupera sus dimensiones originales. Todo el trabajo mecánico que se ha hecho sobre el material durante la tracción es empleado por éste en recuperar sus dimensiones originales, sin que haya disipación de energía por rozamiento. Se denomina *límite de proporcionalidad* al límite A de esta región, a partir del cual el comportamiento ya no es lineal.

Región AB: Cuando aumenta la fuerza aplicada, el comportamiento deja de ser lineal. Sin embargo, en esta región el material sigue teniendo un comportamiento elástico, pero ahora no lineal, hasta que se alcanza el denominado *límite elástico*.

Región BC: Al entrar en la región BC, el comportamiento ya no es ni lineal ni elástico y se entra en la *zona plástica*. Una vez se traspasa el límite elástico, cuando desaparece la fuerza de tracción, el material no recupera sus dimensiones originales, sino que queda con una deformación permanente, se dice que se produce *histéresis* del material. Además al invertir la variación de la fuerza de tracción (o compresión) F, la pendiente del proceso es la misma que se tuvo en la región elástica pero con la deformación permanente. El proceso ya no es reversible, ya que parte del trabajo realizado por la fuerza externa es disipado por las fuerzas internas de rozamiento en el interior del material, siendo la energía disipada el área comprendida entre los caminos de ida y vuelta en el diagrama $F-L$. El resultado es que el material no puede "devolver" toda la energía mecánica que le ha comunicado la fuerza externa, ya que parte de ésta se ha disipado en forma de calor como consecuencia del rozamiento producido en el deslizamiento de unos planos atómicos sobre otros.

Dentro de la zona plástica y no muy lejos del límite elástico llega un momento en que se producen unas fuertes deformaciones para pequeños aumentos en la fuerza aplicada. Así, se entra en la denominada *zona de fluencia*. Se denomina *límite de fluencia* al punto Y, a partir del cual se empieza a producir fluencia de forma más intensa (también se le denomina *límite aparente de elasticidad*). Normalmente se define este límite como la tensión a la que el material experimenta una deformación permanente determinada respecto de lo que habría tenido si su comportamiento hubiera seguido siendo lineal. Esta deformación se toma correspondiente a un $0,2\,\%$, es decir, si se quitara la tensión cuando se alcanza el límite de fluencia, la deformación relativa permanente sería entonces $\epsilon = \Delta L/L = 2\times 10^{-3}$. Este proceso es consecuencia del fallo del material a tensiones cortantes a 45° de la dirección de tracción.

Una vez sobrepasada la zona elástica y liberadas las tensiones, al tensionar de nuevo el material, los límites elástico y de proporcionalidad se alcanzan ahora a una tensión mayor.

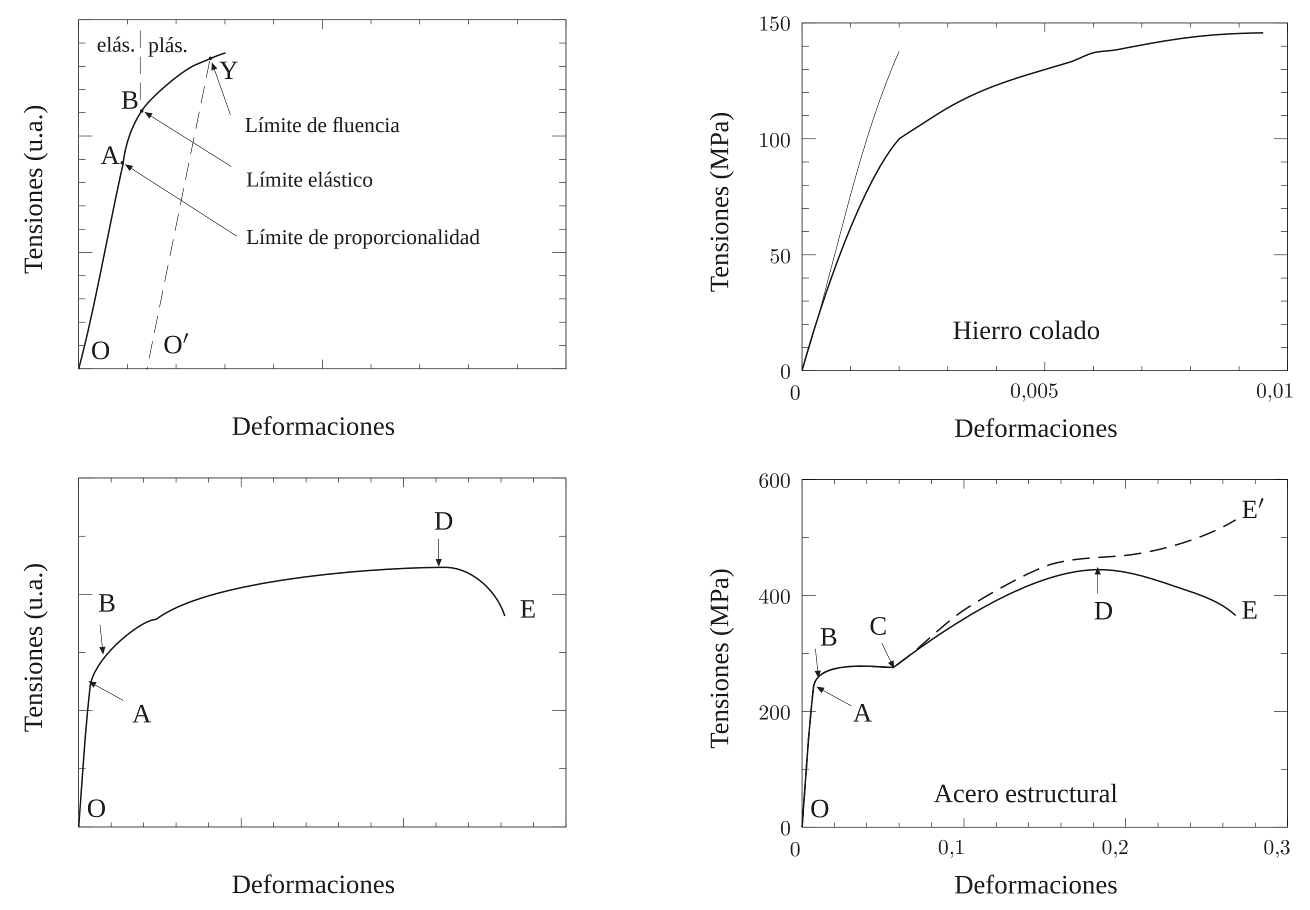


Figura 1–4: Detalle de la región próxima a la zona elástica para un material genérico (parte superior) con los límites de proporcionalidad, elástico y de fluencia, y diagrama tensión-deformación para un material dúctil típico (parte inferior).

Figura 1–5: Comportamiento tensión-deformación del acero estructural y del hierro colado en distintos rangos de fuerzas aplicadas. El hierro templado tiene un comportamiento más quebradizo y rompe al poco de pasar el límite elástico

Región CD: Al seguir aumentando la fuerza aplicada se produce un endurecimiento (la pendiente aumenta) denominado endurecimiento por tracción. Se denomina al punto D *esfuerzo último* y representa la máxima tracción.

Región DE: Al final se llega a una nueva zona de fuertes deformaciones al final de la cual se produce la ruptura del material al llegar a E. La tensión representada en la curva continua se ha obtenido suponiendo que la sección de la muestra no cambia de forma apreciable durante el proceso, pero en realidad esto no es cierto, de forma marcada a partir de la entrada en la zona de fluencia. Si tenemos en cuenta la disminución de la sección transversal y corregimos la tensión por ella, el proceso es el que se muestra en la línea de trazos, produciéndose la rotura en E′. Con frecuencia se denomina *tensión ingenieril* a la que se calcula considerando que la sección transversal se mantiene constante durante la deformación.

Para la mayor parte de los materiales, el comportamiento en la región elástica de pequeñas fuerzas aplicadas es lineal, es decir, existe una relación lineal entre la fuerza aplicada y la deformación producida, el cociente entre ambas es constante. Sin embargo, además de los materiales elásticos lineales mencionados, hay *materiales elásticos no lineales*, en los que en la zona elástica se recuperan las dimensiones iniciales al cesar la fuerza, y en la plástica no, pero en los que la dependencia fuerza-deformación en la zona elástica es no lineal.

La extensión de la zona plástica depende del material. Si ésta es pequeña, el material se rompe cerca del límite de la zona elástica como ocurre con el hierro templado. En este caso hablamos de materiales *frágiles*.

Hay otro tipo de materiales cuya zona elástica es muy pequeña, y presentan un comportamiento esencialmente plástico. Entre éstos podemos mencionar la arcilla y el plomo. En este caso hablamos de *materiales moldeables* o simplemente blandos.

Hay otra propiedad que presentan algunos metales y aleaciones cuando bajo la acción de una fuerza pueden estirarse sin romperse para obtener alambres o hilos. A los materiales que presentan esta propiedad se les denomina *dúctiles*.

No debe confundirse dúctil con blando, la ductilidad aparece una vez que el material está soportando una carga considerable. Para cargas pequeñas, el comportamiento es similar a los materiales elásticos, pero una vez alcanzada la zona de fluencia, ésta es amplia y permite un gran alargamiento sin rotura, al contrario que los materiales frágiles.

En todo lo que sigue se estudiarán materiales elásticos lineales trabajando en la zona elástica, fuera de la zona plástica. Además, las deformaciones que se estudiarán serán en general muy pequeñas comparadas con las dimensiones originales del material objeto de estudio.

1.3.2. Elasticidad y resistencia de materiales.

Existe en la nomenclatura una distinción habitual entre la *Resistencia de Materiales* y la *Teoría de la Elasticidad*. La obtención matemática general de la distribución de tensiones en el interior de un material de forma arbitraria a partir de un sistema genérico de fuerzas aplicadas en el exterior es un problema extremadamente complejo que en general no puede ni siquiera ser resuelto de forma analítica.

Sin embargo, para cuerpos con unas características peculiares, como las barras o las placas, se tienen unas soluciones aproximadas que reflejan bien el comportamiento real. En estos cuerpos, una o dos de las dimensiones del mismo son muy pequeñas comparadas con las demás. Aunque no existe un cuerpo en el cual estas dimensiones se puedan despreciar matemáticamente, en la práctica lo son, lo que permite idealizar algunos cuerpos como barras o placas equivalentes y aplicar la teoría a estos cuerpos.

Las partes más simples de la teoría (flexión simple, torsión, etc...), que son aplicables a cuerpos como los anteriores, se denominan *Resistencia de Materiales*, mientras que las partes más complejas, que corresponden a un análisis más profundo del problema, se denominan *Teoría de la Elasticidad*.

Como se ha dicho, en la Resistencia de Materiales se introducen una serie de suposiciones respecto de las propiedades del material, a las cargas y al carácter de su interacción con los elementos de éste con el objetivo de simplificar el problema complejo que se tiene en la realidad. Estas suposiciones son adicionales a las que se mencionaron en el apartado 1.1.3. Por ejemplo, se entiende por *viga* en este contexto una barra horizontal esbelta sometida a flexión por cargas verticales que actúan transversalmente a su eje longitudinal.

Experimentalmente se comprueba que en los casos simples, el error al que conducen las siguientes aproximaciones es pequeño

- **Homogeneidad:** El material del elemento es homogéneo, es decir, tiene las mismas propiedades en todos los puntos. En la práctica los metales son bastante homogéneos, mientras que la madera, el hormigón, la piedra y los plásticos con relleno son menos homogéneos. Sin embargo, experimentalmente se observa que los cálculos basados en la supuesta homogeneidad del elemento dan con frecuencia resultados satisfactorios si se utilizan valores promedio de sus propiedades.

- **Isotropía:** El material del elemento es isótropo, es decir, sus propiedades en un punto dado no dependen de la dirección. En los materiales habituales, aunque haya elementos cristalinos a escala microscópica, en la práctica éstos están ordenados aleatoriamente en el material, dando como resultado un comportamiento macroscópicamente isótropo.

- **Fuerzas interiores nulas originalmente:** Las fuerzas interiores presentes originalmente en el material, antes de la aplicación de la carga son nulas. En la realidad las cosas no son siempre así, por ejemplo, en los metales aparecen fuerzas internas debidas a enfriamientos no uniformes, en la madera aparecen fuerzas internas debidas a las características concretas del secado y en el hormigón también aparecen fuerzas internas durante el fraguado. El problema adicional es que a menudo es difícil determinar estas fuerzas internas.

- **Principio de Superposición:** El efecto conjunto de un sistema de fuerzas actuando sobre un cuerpo es igual a la suma de los efectos de cada una de esas fuerzas, aplicadas consecutivamente en orden arbitrario. Cuando se trabaja con sólidos deformables, para que esto sea válido debe cumplirse lo siguiente:

    - Los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas son pequeños comparados con las dimensiones del sólido.
    - Los desplazamientos originados por las deformaciones del sólido dependen linealmente de las cargas.

- **Principio de Saint-Venant:** El valor de las fuerzas internas en el sólido en puntos alejados de los lugares de aplicación de las cargas apenas depende de la forma concreta de aplicación de estas cargas.

  Esto nos permitirá, por ejemplo, despreciar en nuestros cálculos el efecto de las tensiones transversales que aparecerán en la unión del elemento prismático que se muestra en la figura 1–6 con su soporte.

En este primer tema se estudiarán bien sistemas sometidos a fuerzas tales que las distribuciones de tensión sean simples, o sistemas que se suponen implícitamente dentro de la categoría anterior de “sistemas simplificables”. En los temas siguientes se

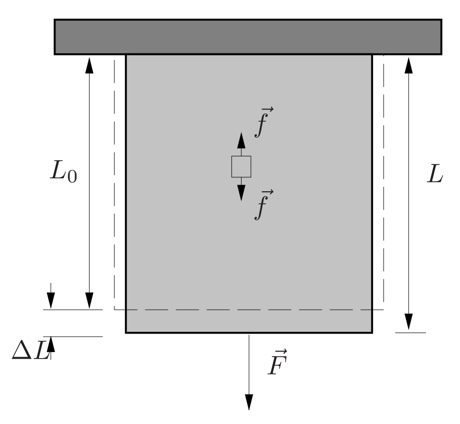


Figura 1–6: Tracción (compresión) simple. Se supone que para éste elemento prismático pueden utilizarse las simplificaciones de la Resistencia de Materiales. Para que esto sea realmente cierto debiera tratarse de una barra o de una lámina fina.

supondrá conocida la distribución de tensiones y se abordará el problema desde un punto de vista microscópico, estudiándose los tensores de tensiones y deformaciones, así como su interrelación, en el entorno de un punto del interior del elemento. En estos apuntes no se tratará la parte más compleja de la Elasticidad, cómo obtener para un sistema de cargas cualquiera, la distribución de tensiones en el material.

En todos los casos nos referiremos a pequeñas deformaciones, aunque por claridad en las figuras éstas se representen mayores. Asimismo, en este capítulo nos referiremos a elementos cuyas dimensiones cumplen las condiciones que hemos mencionado aunque, también por claridad, los representemos de otra forma.

1.4. Tracción o compresión unidimensional simple sobre una barra.

1.4.1. Descripción del fenómeno.

Consideremos una varilla de un material elástico lineal, uno de cuyos extremos está fijo a la parte superior, a la que se aplica una fuerza $\vec{F}$ que tiende a alargarla (o a acortarla, dependiendo del signo). Por el principio de acción y reacción, fijar el extremo de la varilla a la parte superior equivale a aplicar al extremo fijo una fuerza igual y de sentido opuesto a la aplicada al extremo libre.

El primer problema que surge es determinar cuáles son las magnitudes macroscópicas que debemos medir para tener determinado el estado de tensiones de la varilla que estamos estudiando. Para ello consideramos un pequeño elemento de volumen de control, por ejemplo cúbico, en el interior de la varilla y vemos si la magnitud más inmediata, la fuerza, es una magnitud conveniente. Para que lo sea, será necesario que aunque utilicemos una varilla de distintas dimensiones, al aplicar la misma fuerza $\vec{F}$ a la cara inferior de la varilla, se tenga siempre la misma fuerza $\vec{f}$ en las caras superior e inferior del elemento de volumen. Considerando los casos de dos varillas de secciones normal y doble, se ve fácilmente que esto no es así, ya que la fuerza que actúa sobre las caras superior e inferior del elemento de volumen, para una misma fuerza $\vec{F}$ aplicada a ambas varillas, es $\vec{f}$ en el caso de la varilla de sección normal y $\vec{f}/2$ en el de la varilla de sección doble, por lo que la fuerza no es la magnitud ideal. En su lugar se utiliza la fuerza por unidad de superficie o fuerza de tracción unitaria $\vec{F}/S = \vec{\sigma}$, a la que se denomina *tensión* y que es independiente de la sección de la varilla. Obviamente, las dimensiones de esta tensión son las correspondientes a una presión.

Estas tensiones deberán ser iguales[†] a lo largo de toda la varilla, salvo que su peso sea relevante. Esto significa que sobre el material de dentro del elemento de volumen, y a través de las caras superior e inferior del mismo, estará aplicada, por parte del material de fuera del elemento de volumen, la misma tensión σ (si esto no fuera así, el elemento de volumen en cuestión no estaría en equilibrio). Así, cada unidad de longitud de la varilla está sometida a la misma tracción (o compresión) y por tanto, se alarga (o se encoge) lo mismo, de forma que el alargamiento total de la varilla será proporcional a la longitud total de la misma. Como lo que realmente nos interesa es describir el grado de deformación mediante una magnitud independiente de las dimensiones (en este caso la longitud) de la varilla, se utiliza la deformación unitaria, o simplemente deformación, ϵ, definida en la forma:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \simeq \frac{\Delta L}{L_0} \tag{1–1}$$

[†]Realmente lo que debe ser igual a lo largo de toda la varilla es la fuerza $\int \sigma dA$, pero en el caso de pequeñas deformaciones al que nos estamos restringiendo, la sección cambiaría muy poco de un punto a otro, y ello debido a las ligaduras en los apoyos. Si no hubiera esas ligaduras y la sección es originalmente uniforme, también lo sería después de la deformación.

donde se supone que $\Delta L \ll L, L_0$, es decir, que nos limitamos al caso de deformaciones pequeñas. Aquí, L_0 es la longitud inicial de la varilla antes de la deformación. La deformación unitaria que hemos definido es una magnitud adimensional independiente de la longitud de la varilla y es una buena medida del grado de deformación de cada parte del sólido.

El convenio de signos que se utilizará de aquí en adelante es el siguiente: Las tensiones normales y deformaciones unitarias serán tomadas como positivas en el caso de la tracción (hay alargamiento, la longitud aumenta) y negativas en el caso de la compresión (hay acortamiento y la longitud disminuye).

1.4.2. Ley de Hooke. Módulo de Young.

Como hemos visto, a consecuencia de la gran resistencia de los sólidos, las deformaciones que sufren a causa de las fuerzas externas son en general muy pequeñas comparadas con las dimensiones del sólido. En esta aproximación de pequeñas variaciones se recuperan las dimensiones originales al desaparecer la fuerza que producía la deformación (es decir trabajamos en la zona elástica), y para materiales elásticos lineales, estas variaciones son proporcionales a las tensiones que las originan. Esta dependencia lineal se conoce como *Ley de Hooke* y para tensiones en una dimensión (axiales) tiene la forma

$$\sigma = E\epsilon \qquad \text{o} \qquad \epsilon = \frac{\sigma}{E}, \tag{1–2}$$

donde aparece la constante de proporcionalidad E, conocida como *módulo de Young* o *módulo de elasticidad*, característico del material. El módulo de Young tiene dimensiones de presión, y cuanto mayor es su valor, tanto más difícil de deformar longitudinalmente es el sólido. En la tabla 1–1 se dan unos cuantos ejemplos de módulos de Young que pueden variar algo dependiendo de la muestra concreta utilizada.

Tabla 1–1: Módulos de Young E para diversos materiales. Todos los valores se dan en GPa (1GPa = 10^9 Pa = 10^9 Nm^{-2})

Iridio	520	Cobre	$100-140$
Latón	110	Aluminio	70
Acero	$180-250$	Oro	80
Plomo	16	Bronce	$100-120$
Titanio	107	Hierro	$83-170$
Plata	77	Platino	170
Níquel	210	Estaño	41
Cera de abeja	0,2	Cuarzo(fundido)	73
Hielo (a -2°C)	3	Caucho	0,5
Madera de roble	13	PTFE (Teflon)	0,5
Hormigón	$17-35$	Basalto	80
Granito	$10-40$	Mármol	80
Caliza	$10-80$	Arenisca	$2-6$
Alúmina	370	Diamante	1140

El módulo de Young no caracteriza por completo las propiedades elásticas del cuerpo, ya que en la tracción, al alargarse la varilla, ésta se hace más delgada. El módulo de Young permite calcular la deformación unitaria longitudinal de la varilla, pero no da ninguna información acerca de la transversal. La experiencia muestra que, en general, la deformación unitaria transversal ϵ_t es proporcional a la longitudinal ϵ_l a través de una constante de proporcionalidad ν en la forma:

$$\epsilon_t = -\nu\epsilon_l = -\frac{\nu\sigma}{E} \tag{1–3}$$

donde ν es una magnitud adimensional conocida como *coeficiente de Poisson* que puede tener valores en el rango $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$ (en realidad nada impide que ν pueda ser negativo, pero nunca menor de -1, véase la sección 1.6.3. Sin embargo sólo se ha conseguido $-1 \leq \nu \leq 0$ en materiales experimentales de microestructuras complejas). Esta magnitud ν toma el valor 0 para cuerpos porosos que no se contraen lateralmente, en los cuales lo que se produce es un aumento del tamaño de los poros. En la tabla 1–2 se dan algunos valores típicos,que pueden variar de forma importante dependiendo de la muestra concreta utilizada. De este modo, las propiedades elásticas de un material homogéneo e isótropo quedan caracterizadas por las dos magnitudes E y ν.

1.4.3. Energía elástica de deformación en la tracción o compresión unidimensional.

El trabajo realizado en la deformación elástica de un cuerpo se acumula en forma de energía elástica. Calcularemos esta energía para una barra sometida a tracción. El trabajo elemental δW producido por una fuerza de tracción $\vec{F}$ que aumenta la longitud de la barra en $dL = d[L_0(1+\epsilon)] = L_0 d\epsilon$ será

$$\delta W = F dL = F L_0 d\epsilon = S\sigma L_0 d\epsilon = SE\epsilon L_0 d\epsilon = \epsilon EV d\epsilon = EV d\left(\frac{\epsilon^2}{2}\right) = \delta W. \tag{1–4}$$

Tabla 1–2: Coeficientes de Poisson para diversos materiales

Oro	0,42	Plata	0,37	Platino	0,39
Acero	0,28	Aluminio	0,34	Hierro	0,27
Cobre	0,34	Níquel	0,30	Plomo	0,44
Bronce	0,36	Latón	0,35	Titanio	0,34
Estaño	0,33	Madera	$0{,}3-0{,}5$	Corcho	0
PTFE (Teflon)	0,46	Cuarzo	0,14	Vidrio normal	0,24
Hormigón	0,19	Granito	0,21	Arenisca	0,1
Caucho blando	0,42	Caucho duro	0,39	Polietileno	0,33

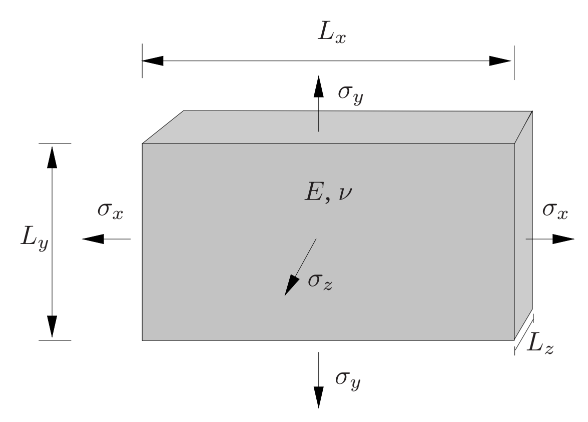


Figura 1–7: Tensiones y deformaciones por tracción y compresión en tres direcciones perpendiculares.

Integrando esta expresión, se tiene que si la deformación unitaria de la barra varía desde 0 hasta una magnitud ϵ se efectuará un trabajo

$$\frac{1}{2}EV\epsilon^2 \tag{1–5}$$

y cada unidad de volumen de la barra deformada "almacena" la siguiente cantidad de energía elástica:

$$\mathcal{U} = \frac{E\epsilon^2}{2} = \frac{1}{2}\epsilon\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} \tag{1–6}$$

Ésta es la energía que utiliza el material para realizar un trabajo contra la fuerza externa, cuando ésta disminuye y el cuerpo va recuperando sus dimensiones originales. No se realiza trabajo como consecuencia de la deformación transversal al ser ésta perpendicular a la fuerza.

1.4.4. Deformación volumétrica.

Generalizaremos ahora las fórmulas que se han visto para la tracción simple al caso de deformaciones homogéneas cualesquiera en las que tenemos sólo tracciones o compresiones, pero en las tres direcciones. Para ello consideraremos un elemento de un material isótropo en forma de paralelepípedo rectangular que se estira o comprime por la aplicación de fuerzas en todas sus caras.

Las fuerzas F_x, F_y y F_z serán en general distintas entre sí, y como consecuencia de la aplicación de las mismas, se crearán tensiones elásticas $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ que a su vez serán en general distintas entre sí. Tanto para las tensiones como para las deformaciones unitarias utilizaremos el convenio:

Tracción	σ, ϵ, $\mathcal{F}$ positivas
Compresión	σ, ϵ, $\mathcal{F}$ negativas

En este caso, tendremos deformaciones unitarias ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z en cada una de las direcciones x, y, z que, en general, serán distintas entre sí. Consideraremos la deformación unitaria resultante en cada una de las direcciones como la superposición del resultado de las tres tracciones o compresiones simples en cada dirección. Así, tendremos que, para ϵ_x, tomando σ_x, σ_y y σ_z como positivas (si alguna es negativa su signo cambia y por tanto su efecto es el contrario), tendremos alargamiento como consecuencia de σ_x y acortamiento como consecuencia de σ_y y σ_z quedando:

$$\epsilon_{x_x} = \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \epsilon_{x_y} = -\nu\frac{\sigma_y}{E} \quad ; \quad \epsilon_{x_z} = -\nu\frac{\sigma_z}{E} \tag{1–7}$$

y análogamente para ϵ_y y ϵ_z. En todas las expresiones se ha utilizado la notación para p. ej ϵ_{y_x} de deformación unitaria en la dirección y originada por la fuerza aplicada en la dirección x. Sumando todos los efectos para las deformaciones unitarias en cada una de las tres direcciones se tiene, para un material isótropo,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \end{aligned} \tag{1–8}$$

que es la ley de Hooke extendida a tres dimensiones.

Calculemos ahora la variación del volumen $V = L_x L_y L_z$ para ΔV pequeño. Para ello tomamos logaritmos neperianos $\ln V = \ln L_x + \ln L_y + \ln L_z$ e incrementos (que para pequeños cambios se comportarán de forma aproximada a las diferenciales) quedando, para la variación unitaria de volumen, deformación volumétrica, o deformación cúbica θ:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L_x}{L_x} + \frac{\Delta L_y}{L_y} + \frac{\Delta L_z}{L_z} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{1–9}$$

Sustituyendo las expresiones para ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z se tiene:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{1–10}$$

Es importante recalcar que estos resultados son válidos únicamente para deformaciones pequeñas y comportamiento elástico lineal e isótropo, y no son ciertos para grandes deformaciones.

1.4.5. Casos particulares de deformación en tres dimensiones.

Tensión hidrostática.

En el caso de tensión hidrostática todas las tensiones elásticas son iguales $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \equiv \sigma$ (y por tanto $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z \equiv \epsilon$) y se tiene:

$$\epsilon = \frac{1-2\nu}{E}\sigma \tag{1–11}$$

y la deformación cúbica es:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = 3\epsilon = \frac{\sigma}{\mathcal{K}} \tag{1–12}$$

donde $\mathcal{K}$ es el *módulo de compresibilidad* dado por:

$$\mathcal{K} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{1–13}$$

que como se ve se conoce una vez se conocen el módulo de Young y el coeficiente de Poisson.

La *energía elástica* por unidad de volumen† acumulada en la compresión volumétrica hidrostática será:

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2}\epsilon\sigma = \frac{\mathcal{K}\theta^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\mathcal{K}} = \frac{1}{2}\sigma\theta \tag{1–17}$$

†Ahora, teniendo en cuenta que $\theta = 3\epsilon$ y que $\sigma = \mathcal{K}\theta$ el cálculo de la energía de deformación en cada una de las direcciones es de la forma:

$$\delta W^{1dim} = FdL = \sigma S L_0 d\epsilon = \mathcal{K}\theta V d\epsilon = \frac{1}{3}\mathcal{K}\theta V d\theta = \frac{1}{3}\mathcal{K}V d\left(\frac{\theta^2}{2}\right) \tag{1–14}$$

por lo que la energía total de deformación hidrostática será tres veces este valor,

$$\delta W^{3dim} = 3 \times \delta W^{1dim} = \mathcal{K}V d\left(\frac{\theta^2}{2}\right) \tag{1–15}$$

o simplemente podríamos haber hecho

$$\delta W = \sigma dV = \mathcal{K}\theta V d\theta = \mathcal{K}V d\left(\frac{\theta^2}{2}\right) \tag{1–16}$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$V = V_0(1+\theta) \qquad \Rightarrow \qquad dV = V_0 d\theta$$

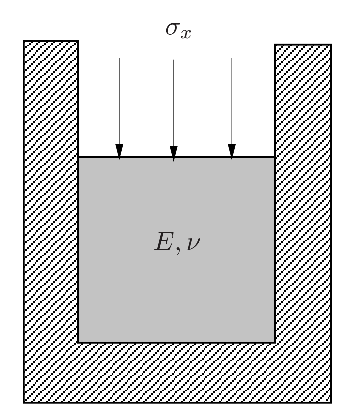


Figura 1–8: Compresión uniaxial aplicada con límites en las paredes. Como consecuencia de la rigidez de las paredes, aparecen fuerzas de reacción en las direcciones y y z (con tensiones σ_y, σ_z).

$\mathcal{K}$ debe ser positiva (V aumenta en la tracción hidrostática y disminuye en la compresión) porque si no, los cuerpos serían inestables energéticamente. Esto se ve en la expresión de la energía, donde si $\mathcal{K} < 0$ se tendría que $\mathcal{U} < 0$ y por tanto cuanto mayor fuera la tensión menor sería la energía del cuerpo, el cuerpo tendería a pasar a energía menor indefinidamente y para ello se deformaría indefinidamente. Lo anterior implica que

$$\mathcal{K} > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2\nu > 0 \quad \Rightarrow \quad \nu < \frac{1}{2}, \tag{1–18}$$

luego $0 < \nu < \frac{1}{2}$. Un valor $\nu = \frac{1}{2}$ implicaría un módulo de compresibilidad $\mathcal{K}$ infinito para un módulo de Young finito, es decir, sería un cuerpo absolutamente incompresible hidrostáticamente.

Deformación con restricciones: ejemplo de compresión unilateral o uniaxial.

Consideraremos un cuerpo limitado por unas paredes suficientemente rígidas, que permanecen fijas de modo que sus dimensiones transversales no varían apreciablemente. Aparecen unas reacciones de las paredes σ_y y σ_z, que impiden la extensión lateral. Las condiciones de invariabilidad de dimensiones en las direcciones y y z serán $\epsilon_y = \epsilon_z = 0$. De este modo se tiene:

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} = \epsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = 0 \tag{1–19}$$

de donde se tiene $\sigma_y - \nu\sigma_z = \sigma_z - \nu\sigma_y = \nu\sigma_x$, que tiene por única solución $\sigma_y = \sigma_z$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación $\sigma_y - \nu\sigma_z = \nu\sigma_x$ que se había obtenido anteriormente, se tiene:

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x \tag{1–20}$$

quedando entonces la compresión axial en la forma:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} = \frac{1 - \nu - 2\nu^2}{E(1-\nu)}\sigma_x \tag{1–21}$$

1.5. Superposición de los efectos elásticos y térmicos.

Es bien sabido que, en general, los cuerpos se dilatan al calentarse. El calentamiento da lugar a una variación de las dimensiones del cuerpo que en el caso general debe ser tenida en cuenta en nuestros cálculos. Se sabe que, para pequeñas variaciones de tamaño, las longitudes varían con la temperatura en la forma:

$$L = L_0(1 + \alpha_l \Delta T) \tag{1–22}$$

donde α_l es el coeficiente de dilatación lineal.

De forma análoga a como hemos hecho con las deformaciones producidas por fuerzas, podemos definir una deformación unitaria debida únicamente a los efectos térmicos en la forma:

$$\epsilon_{térmica} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L_{térmica}}{L_0} = \alpha_l \Delta T \tag{1–23}$$

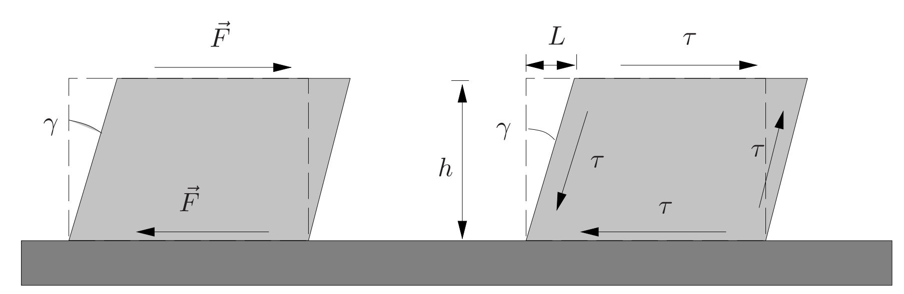


Figura 1–9: Tensiones y deformaciones cortantes. Para que un cuerpo al que se aplican un par de fuerzas cortantes $\vec{F}$ como el de la figura esté en equilibrio mecánico, estas fuerzas dan lugar a otro par de fuerzas en las caras laterales que contrarresta el anterior. El valor de las tensiones elásticas con origen en estas fuerzas debe ser el mismo en los dos pares de caras, para que se mantenga el equilibrio mecánico.

Con estas expresiones, la deformación unitaria total queda en la forma:

$$\begin{aligned} \epsilon_{total_x} &= \epsilon_{elástica_x} + \epsilon_{térmica_x} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_l \Delta T \\ \epsilon_{total_y} &= \epsilon_{elástica_y} + \epsilon_{térmica_y} = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha_l \Delta T \\ \epsilon_{total_z} &= \epsilon_{elástica_z} + \epsilon_{térmica_z} = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha_l \Delta T \end{aligned} \quad (1–24)$$

donde solamente se ha considerado el caso de materiales isótropos, en los cuales ni α_l ni E dependen de la dirección. De hecho, en materiales anisótropos no tiene sentido hablar ni de módulo de Young ni de coeficiente de Poisson sino de componentes del tensor de las constantes elásticas (véase el capítulo 4).

1.6. Deslizamientos o distorsiones.

1.6.1. Concepto de deslizamiento o distorsión. Módulo de rigidez.

Consideraremos ahora deformaciones donde se mantiene el volumen, pero no la forma del cuerpo, los *deslizamientos* o *distorsiones*. La invariancia del volumen implica que

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0, \quad (1–25)$$

teniéndose para el eje x

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_x = \frac{1}{2G}\sigma_x = \epsilon_x \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = 2G\epsilon_x \quad (1–26a)$$

y ecuaciones análogas para los ejes y y z,

$$\sigma_y = 2G\epsilon_y, \qquad \sigma_z = 2G\epsilon_z \quad (1–26b)$$

donde se ha definido el *módulo de rigidez* G como:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1–27)$$

1.6.2. Esfuerzos cortantes (o de cizalladura).

Como consecuencia de la aplicación al cuerpo de fuerzas tangenciales a la superficie (en vez de perpendiculares) el paralelepípedo de la figura se inclina un ángulo γ (denominado *ángulo cortante* o de deslizamiento).

El ángulo γ es pequeño, ya que en todo momento estamos considerando deformaciones muy pequeñas respecto de las dimensiones del cuerpo, por lo que se puede hacer la aproximación $\operatorname{sen}\gamma \simeq \gamma$ (*¡¡Que sólo es válida con γ medida en radianes!!*). La ley de Hooke que ya conocíamos pasa a ser para el caso de los cortantes:

$$\tau = G\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \quad (1–28)$$

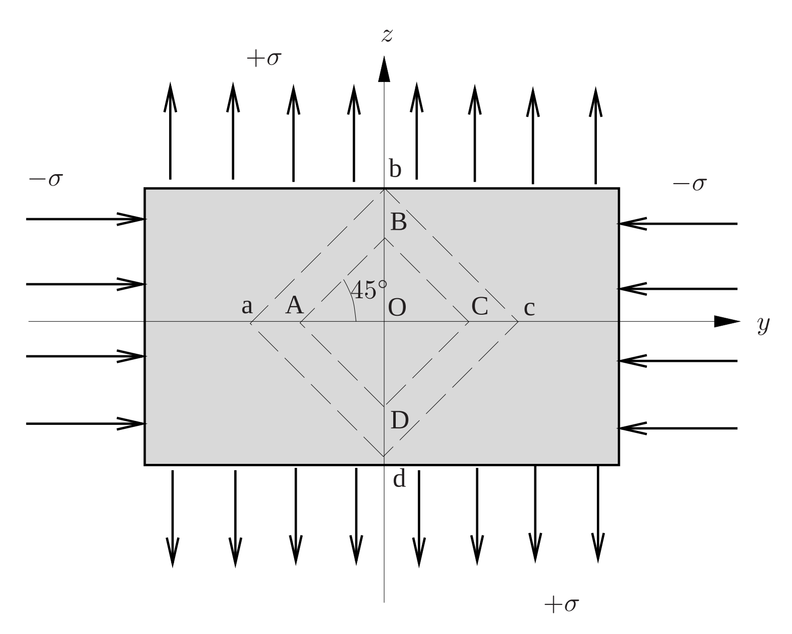


Figura 1–10: Obtención de la Ley de Hooke para los cortantes. Para ello se considerará el estado de tensiones de la figura, donde hay aplicadas en un plano (en la figura el Oyz) tensiones σ_y y σ_z de idéntica magnitud, pero distinto signo, estudiándose como se deforma el cuadrado ABCD rotado $45°$ respecto de los ejes Ox y Oz.

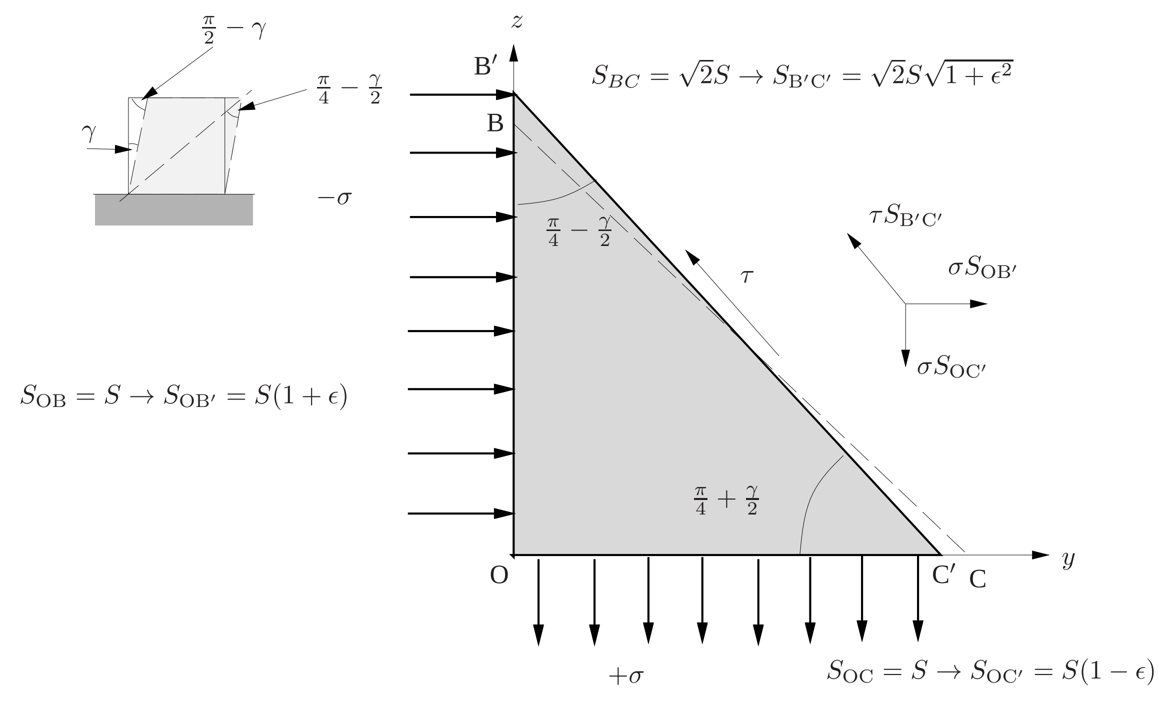


Figura 1–11: Equilibrio de fuerzas en el triángulo de la figura. Como consecuencia de las tensiones aplicadas, la distancia OB aumenta y la distancia OC disminuye, variando asimismo los ángulos de $45°$ originales.

donde G es el módulo de rigidez que acabamos de introducir de forma general para las distorsiones.

En realidad, la ecuación (1–28) no es un resultado tan nuevo como parece, sino que puede obtenerse a partir de la ley de Hooke que ya conocemos (Ec. 1–8). Para ello consideremos un cuerpo en un estado de tensión plano, al que se aplican una tracción en una dirección y una compresión en la otra dirección, ambas de idéntica magnitud (pero de distinto signo) como se indica en la figura, manteniéndose libre de tensiones las caras perpendiculares a la otra dirección (x en este caso). Así, se cumplen $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$ y $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0$, por lo que se produce una distorsión en la que se satisfacen las ecuaciones (1–26).

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas al volumen asociado al triángulo rectángulo OB′C′ que se muestra en la figura, se observa que sobre la superficie asociada a la hipotenusa actuará una fuerza cortante que da una tensión cortante†

†Para ver que esta relación es exacta, consideremos rigurosamente el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre el triángulo. Como la magnitud de

$\tau = \sigma$ que, junto con las que actúan a través de las superficies asociadas a las hipotenusas de los otros tres triángulos dan un cortante completo como el de la figura 1–9. Es decir, en realidad estamos estudiando un cortante.

Considerando las relaciones trigonométricas que se satisfacen en el triángulo OB′C′, se obtiene

$$\frac{\overline{\mathrm{OC}'}}{\overline{\mathrm{OB}'}} = \frac{1+\epsilon_y}{1+\epsilon_z} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right), \tag{1–29}$$

que mediante la aproximación $\tan(\gamma/2) \simeq \gamma/2$ queda

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}} = \frac{1+\epsilon_y}{1+\epsilon_z}, \tag{1–30}$$

de forma que al comparar las dos expresiones y tener en cuenta las ecuaciones (1–26b) para las distorsiones se tiene

$$\gamma = 2\epsilon_z = -2\epsilon_y = \frac{\sigma_z}{G} = \frac{\sigma}{G} = \frac{\tau}{G} \quad \Rightarrow \quad \tau = G\gamma. \tag{1–31}$$

Nótese que si hubiéramos aplicado tensiones cortantes τ apropiadas en el cuadrado exterior “abcd” rotado $45°$ habríamos producido en el cuadrado interior “ABCD” rotado exactamente el mismo estado de tensiones que el par de tensiones normales σ y $-\sigma$. Entenderemos esto mejor cuando tratemos el tensor de tensiones.

Como el módulo de rigidez debe ser una magnitud positiva, ya que en caso contrario a una tensión cortante en una dirección (sin ninguna tensión más aplicada) le correspondería un desplazamiento en la dirección contraria, se debe cumplir que $1+\nu > 0 \Rightarrow \nu > -1$, quedando los límites para el coeficiente de Poisson ν, $-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$. El caso $\nu = -1$ daría un módulo de rigidez G infinito para un módulo de Young finito, por lo que se tendría en ese caso un cuerpo absolutamente indeformable frente a los cortantes.

Según esto que hemos visto, podrían existir cuerpos con un valor negativo del coeficiente de Poisson (serían cuerpos en los que hay un ensanchamiento lateral como consecuencia de una tracción simple), pero en la naturaleza no se conocen cuerpos así, sólo se ha conseguido en algún caso muy especial con un material de laboratorio[15].

1.6.3. Energía elástica de deformación en el cortante.

Hemos visto que cuando se aplica una fuerza cortante a un material, éste se deforma. Si estamos dentro del límite elástico, al desaparecer la fuerza que produce la deformación, el material recupera sus dimensiones originales. Podemos decir que, análogamente al caso de un muelle que se estira, el material almacena al deformarse una energía elástica que empleará posteriormente en recuperar su forma inicial en el caso de que la fuerza cortante haya desaparecido. Calculemos esta energía elástica. El desplazamiento L de una base frente a la otra en función de la tangente del ángulo cortante y de la altura h del prisma viene dado por:

$$\tan\gamma = \frac{L}{h} \quad \rightarrow \quad L = h\tan\gamma \tag{1–32}$$

Como nos restringimos al caso de pequeñas deformaciones, podremos hacer la aproximación $\tan\gamma \simeq \gamma$ (con γ medida en radianes), quedando la expresión anterior como $L \simeq h\gamma$. Así, la relación entre una variación infinitesimal dL de la distancia L y una variación infinitesimal $d\gamma$ del ángulo cortante γ viene dada por:

$$dL \simeq h d\gamma \tag{1–33}$$

De este modo, el trabajo elemental δW realizado por una fuerza F al desplazar la superficie superior en dL es:

$$\delta W = F dL = F h d\gamma = \tau S h d\gamma = V G \gamma d\gamma \tag{1–34}$$

ambas tensiones es la misma, pero su signo distinto, no hay deformación en la dirección z. Por ello trabajaremos con fuerzas por unidad de profundidad, obteniéndose para el cuadrado del módulo de la fuerza sobre la cara B′C′, el resultado

$$\tau^2\overline{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}^2 = \sigma^2\overline{\mathrm{OB}'}^2 + \sigma^2\overline{\mathrm{OC}'}^2 = \sigma^2\overline{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}^2$$

que da directamente $\sigma = \tau$. Para obtener esta expresión se ha tenido en cuenta que, en el triángulo rectángulo OB′C′, el cuadrado del lado B′C′ es

$$\overline{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}^2 = \overline{\mathrm{OB}'}^2 + \overline{\mathrm{OC}'}^2$$

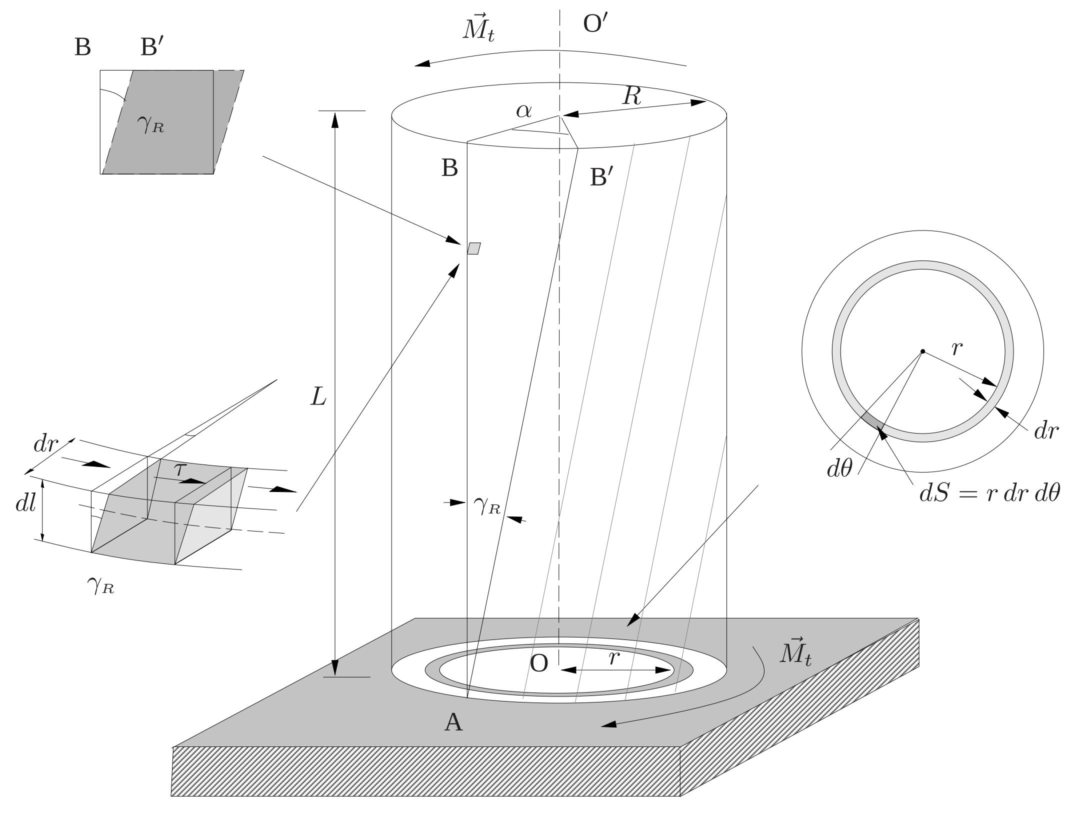


Figura 1–12: Torsión de una barra cilíndrica. En la figura se representa una barra cilíndrica que es torsionada bajo la acción de dos pares de fuerzas que actúan en cada una de las bases, cada uno de ellos dando momentos M_t iguales y opuestos dirigidos a lo largo del eje del cilindro.

que al integrar da, para el trabajo realizado por la fuerza F al deformar el sólido un ángulo γ

$$W = \frac{1}{2} V G \gamma^2 \tag{1–35}$$

Por tanto, la energía elástica almacenada por unidad de volumen en el material durante una deformación cortante es:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2} \tau \gamma \tag{1–36}$$

Una consecuencia inmediata de esta expresión es que G debe ser una magnitud positiva, ya que si fuera negativa se tendría una inestabilidad energética. Si fuera negativo, al aplicar una tensión cortante de cualquier signo, $\mathcal{U}$ sería negativa, y además, tanto más negativa cuanto mayor fuera τ, es decir, el material estaría más cómodo energéticamente cuanto más deformado estuviera. Esto se ve también en la expresión $\tau = G\gamma$. Por tanto, $G > 0$, y como $G = E/[2(1+\nu)]$ se tiene

$$1 + \nu > 0 \quad \Rightarrow \quad \nu > -1 \tag{1–37}$$

luego los límites teóricos para el coeficiente de Poisson son:

$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \tag{1–38}$$

aunque en la realidad, como ya se ha dicho, no se conocen materiales naturales con $\nu < 0$.

1.7. Deformaciones inhomogéneas.

Hasta ahora hemos estudiado solamente los casos en que todos los elementos del cuerpo objeto de estudio están sometidos al mismo estado de tensiones. Sin embargo, en muchas ocasiones distintos elementos del cuerpo están sometidos a distintos estados de tensiones y por tanto tienen distintas deformaciones. En estos casos, se dice que tenemos deformaciones inhomogéneas. El estudio general de las deformaciones inhomogéneas es a menudo difícil, pero hay dos casos de deformaciones inhomogéneas simples de gran importancia, la flexión y la torsión.

1.7.1. Esfuerzos de torsión.

Estudiaremos ahora un caso de deslizamiento puro, pero no homogéneo, el de una barra que tiene uno de sus extremos fijo a un soporte, retorciéndose desde el otro extremo.† Así, la barra entera se retuerce, pero las distintas secciones de la barra giran un ángulo distinto respecto de la base fija, dependiendo de la distancia a que se encuentren de ésta. Sobre cada una de las bases del cilindro actúa un sistema de fuerzas de resultante nula y momento M_t, de sentido distinto en cada base. De este modo, a través de cada superficie intermedia paralela a las bases se tiene un esfuerzo de *torsión*. La magnitud de éste es uniforme a lo largo del cilindro de altura L, de forma que para cada elemento de la misma altura dL se tiene el mismo giro $d\alpha$ entre sus bases si el giro total es α.

Consideremos el cilindro que se muestra en la figura, de radio R y longitud L. Como consecuencia de la deformación, cada una de las generatrices AB se transforma en una línea inclinada AB′. Si las deformaciones son muy pequeñas, es posible aproximar el triángulo real ABB′ sobre la pared cilíndrica por un triángulo ABB′ en el plano. Así, para un tubo imaginario de espesor despreciable en la superficie lateral exterior del cilindro, se cumple:

$$\overline{\mathrm{BB}'} = R\alpha \to \gamma_R \simeq \tan\gamma_R \simeq \frac{\overline{\mathrm{BB}'}}{L} = \frac{R\alpha}{L} \simeq \frac{\overline{\mathrm{BB}'}}{\overline{\mathrm{AB}}} \tag{1–39}$$

aproximación que sólo es válida para pequeñas deformaciones y con el ángulo expresado en radianes. Si consideramos ahora una superficie cilíndrica de radio r ($< R$), es decir, en el interior del cilindro, se tendrá que sus elementos de volumen estarán deformados un ángulo cortante $\gamma(r) = r\alpha/L$, menor que el ángulo γ_R que corresponde a los elementos en la superficie del cilindro. De este modo, distintos elementos de la barra cilíndrica sufren deslizamientos diferentes, menores cuanto más próximo al eje está el elemento.

El valor absoluto de la fuerza que actúa sobre un elemento de superficie horizontal (en el dibujo) de ese tubo diferencial, a una distancia r del eje, de espesor dr y ángulo comprendido $d\theta$ es:

$$dF(r,\theta) = \tau dS = G\gamma dS = G\gamma r dr d\theta \tag{1–40}$$

El momento respecto del eje OO′ será, para este elemento diferencial:

$$dM_t(r,\theta) = r dF(r,\theta) = G\gamma r^2 dr d\theta = \frac{G\alpha}{L} r^3 dr d\theta \tag{1–41}$$

El momento de las fuerzas que actúan sobre la corona circular de espesor dr que se encuentra a una distancia r del eje del cilindro es entonces:

$$dM_t(r) = \int_0^{2\pi} dM_t(r,\theta) = \frac{2\pi G\alpha}{L} r^3 dr \tag{1–42}$$

quedando para toda la superficie de la base del cilindro (y para cualquier otra sección paralela a la misma) el momento de torsión:

$$M_t = \int_0^R dM_t = \pi G \frac{\alpha}{L}\frac{R^4}{2} = \frac{\pi}{32}\frac{D^4}{L} G\alpha \tag{1–43}$$

donde $D = 2R$ es el diámetro del cilindro y M_t el momento de las fuerzas que actúan sobre la cara superior del cilindro. Sobre la cara inferior actúa un sistema de fuerzas que da un momento resultante igual al anterior, pero de sentido contrario. El resultado es un esfuerzo de torsión caracterizado por un momento de torsión M_t. En el caso que hemos estudiado el esfuerzo de torsión es uniforme a través de las distintas superficies paralelas a las bases, aunque los estados de tensiones y deformaciones en sí sean inhomogéneos.

Un cilindro de un material dado será más fácil de deformar por torsión cuanto mayor sea su longitud, y tanto más difícil cuanto mayores sean su diámetro y su módulo de rigidez.

Como hemos visto, esta torsión se transmite entre todos los elementos del cilindro a través de los distintos cortes horizontales, estando todo el cilindro sometido a este esfuerzo de torsión. Recordemos que cuando hablamos de momento de torsión en realidad nos referimos nos referimos a los pares de momentos que ejerce una parte del sistema sobre la otra a través de la superficie correspondiente.

1.7.2. Esfuerzos de flexión.

Flexión y tipos de flexión

Hasta el momento se han visto deformaciones por alargamiento o acortamiento en las que los elementos del sólido paralelos a las fuerzas que actúan conservan su dirección. Otro sistema inhomogéneo de tensiones es la *flexión*, en la que se produce

† Nótese que esto es equivalente a una barra retorcida desde ambos lados, simplemente tomamos la referencia del giro en uno de ellos

una curvatura bajo la acción de sistemas de fuerzas que dan lugar a pares de momentos netos iguales y opuestos con ejes paralelos (posiblemente junto con otras acciones distintas). La flexión lleva aparejadas deformaciones por alargamiento y acortamiento y dependiendo de como sean éstas de importantes, será más o menos fácil deformar el elemento. Se denomina *flecha* al desplazamiento vertical máximo que sufre la barra.

Podemos clasificar la flexión según el tipo de esfuerzos presentes. Cuando a través de las secciones transversales de un elemento o región del mismo únicamente actúan esfuerzos flectores decimos que se tiene *flexión pura*. En estas condiciones los esfuerzos normal, cortante y de torsión son nulos en todo el elemento (o por lo menos en la región considerada). El hecho de que no haya cortantes en la práctica implica que el esfuerzo flector debe ser además constante en dicho elemento o región (véase la sección dedicada a la relación entre la fuerza cortante y la variación del momento flector en la página 24). Si además de los esfuerzos flectores actúan esfuerzos cortantes tenemos la denominada *flexión simple*. El hecho de que aparezcan cortantes implica que el esfuerzo flector a través de las distintas secciones es variable en dicho elemento o región (véase de nuevo la página 24). Cuando sobre las distintas secciones actúan conjuntamente esfuerzos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos normales se tiene la denominada *flexión compuesta*.

También podemos clasificar la flexión de acuerdo con la simetría de las fuerzas y deformaciones. Si por ejemplo, consideramos una barra homogénea horizontal con un plano de simetría vertical π, sometida a una serie de fuerzas (peso, reacciones de los apoyos, etc...) simétricas respecto de ese plano veremos que como consecuencia de éstas, cada fibra de la barra se deforma, pero el plano vertical π de simetría se sigue manteniendo durante la deformación. En estas condiciones estamos ante un caso de *flexión plana*, como los que se muestran en la figura 1–13. El momento flector neto que aparece en la flexión plana a través de cada sección transversal debe ser perpendicular al plano de simetría. Si no hay simetría respecto de un plano π se tiene la denominada *flexión desviada*.

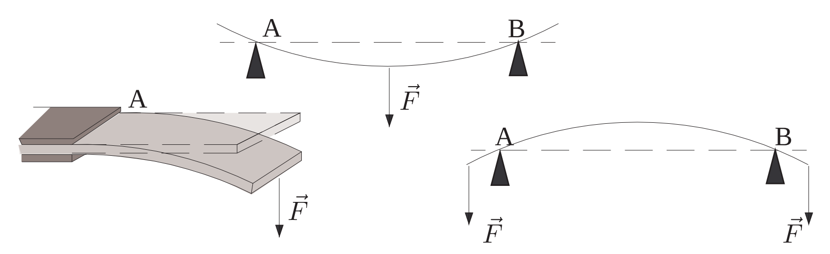


Figura 1–13: Flexión plana. Se produce cuando la deformación por flexión tiene lugar manteniendo un plano de simetría, en el caso de la figura, el plano vertical que pasa por el centro de la pieza.

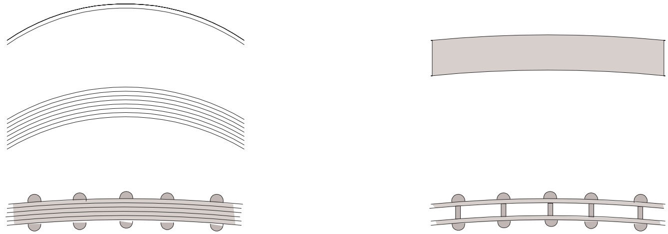


Figura 1–14: La facilidad de deformar por flexión un elemento de un material depende de la forma del mismo. Según sea la pieza concreta a deformar será más fácil o más difícil hacerlo. Por ejemplo, será mucho más fácil deformar por flexión un conjunto de láminas apiladas que ese mismo conjunto de láminas que estén además remachadas.

Como decíamos, la dificultad de la deformación por flexión está relacionada con la magnitud de las deformaciones por acortamiento y alargamiento asociadas a la misma, como se ve mejor en los siguientes ejemplos. Si por ejemplo consideramos el caso de una lámina muy fina, ésta se deformará con facilidad, ya que la variación de longitud en los extremos superior o inferior de la misma es pequeña. Sin embargo, si consideramos el caso de un conjunto de láminas apiladas, pero no unidas entre sí, como un taco de hojas de papel, la deformación será algo más difícil, pero no mucho más, ya que la variación de longitud de cada hoja individual sigue siendo pequeña, y una hoja desliza sobre la otra. Sólo el rozamiento entre las hojas dificulta un poco la flexión. En cambio, si las láminas de esta pila están grapadas entre sí, ya no deslizan unas sobre otras al producirse la deformación, y las hojas más externas por fuera sufren una fuerte tracción que intenta alargarlas, mientras que las hojas más externas por dentro sufren una fuerte compresión que intenta acortarlas. El resultado de todo esto es que resulta mucho más difícil deformar el taco de hojas ahora que antes, ya que ahora las variaciones de longitud de las hojas son mucho más importantes. Análogamente ocurriría para el caso de dos planchas separadas entre sí, pero remachadas, ya que los remaches impiden que deslicen las planchas una respecto de la otra.

Una visión parecida es la que utilizaremos para abordar el problema. Consideraremos el elemento elástico a estudiar como compuesto imaginariamente de una serie de fibras longitudinales. Aunque las distintas fibras se mueven solidariamente, las que se encuentran hacia la concavidad están comprimidas, mientras que las que se encuentran hacia la convexidad se encuentran traccionadas, y sólo las fibras que se encuentran a una determinada altura no se deforman y mantienen su longitud.

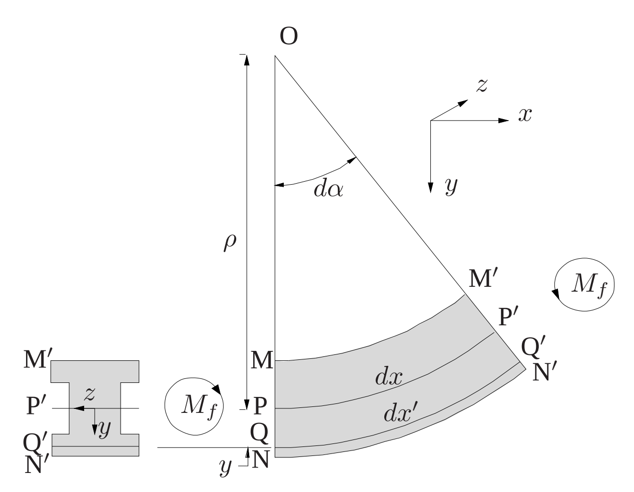


Figura 1–15: Estudio analítico del momento flector en flexión plana pura. Para estudiar analíticamente la relación entre el momento flector y el ángulo flectado en un elemento consideramos un corte del mismo de espesor infinitesimal, como se muestra (de una forma bastante exagerada) en la figura. La fibra neutra está representada por la línea PP′ y a través de las caras del elemento en contacto con el resto de la pieza actúa un sistema de fuerzas que da un momento flector M_f. El sistema de ejes se refiere a la parte derecha de la figura.

Cada una de estas fibras estaría sobre la denominada *fibra neutra*. Definiríamos la fibra neutra como el lugar geométrico de los puntos del elemento elástico que no están tensionados en la dirección longitudinal. Todas las fibras que se encuentran situadas más hacia la convexidad se alargan, mientras que las fibras que se encuentran hacia la concavidad se acortan. Para la flexión pura, esta fibra neutra se encuentra situada a la altura del centro de gravedad de la sección plana de la barra, como se verá en el apartado siguiente.

Estudio analítico del momento flector en flexión pura y plana.

Estudiemos ahora el problema analíticamente, observando cuál es el efecto de la flexión pura sobre una sección del elemento, por supuesto todo en el caso de pequeñas deformaciones (y elemento esbelto) en el que se satisface la ley de Hooke (1–2) para la tracción y compresión unidimensional y suponiendo que el módulo de Young es el mismo en tracción y compresión.

Además de lo anterior, supondremos que la sección del elemento es simétrica respecto del plano de simetría vertical, de forma que la deformación tiene lugar manteniéndose dicho plano de simetría π. Es decir, lo que estudiaremos en realidad es la flexión plana pura en la que el único momento flector es perpendicular al plano se simetría. En estas condiciones hablamos de *eje neutro* como el corte de la fibra neutra con el plano de simetría.

En estas condiciones, el corte de la figura (1–15) corresponde al plano de simetría vertical π. En dicha figura, MN y M′N′ son las proyecciones sobre π de dos secciones del elemento, a distancias x y $x+dx$ de la sección recta original, O es el centro de curvatura del arco de fibra neutra PP′, ρ es el radio de curvatura y $d\alpha$ el ángulo POP′.

Consideremos una fibra cualquiera, a una distancia y de la fibra neutra en la sección considerada y a una distancia $\rho + y$ del centro de curvatura O. El ángulo dα será, para ρ y $\rho + y$:

$$d\alpha = \frac{dx}{\rho} \qquad d\alpha = \frac{dx'}{\rho + y} \tag{1–44}$$

quedando la variación de longitud de la fibra:

$$dx - dx' = (\rho + y)d\alpha - \rho d\alpha = y d\alpha \tag{1–45}$$

y por tanto la deformación unitaria ϵ es, para la fibra a una distancia $\rho + y$ de la fibra neutra:

$$\epsilon = \frac{dx' - dx}{dx} = y\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y}{\rho} \tag{1–46}$$

Aplicando la Ley de Hooke,†

$$\sigma = E\epsilon = E\frac{y}{\rho} \tag{1–47}$$

†Nótese que esto es cierto para elementos esbeltos, para elementos masivos hacen falta correcciones debidas a la oposición transversal del material a la deformación.

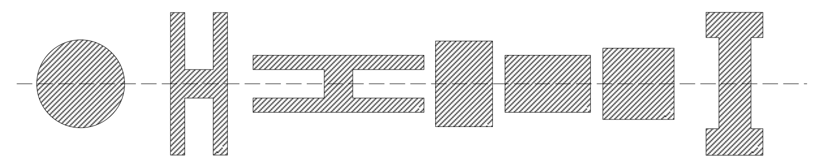


Figura 1–16: Distintas formas para un mismo área de la sección de la barra. A pesar de que en todos los casos el área de la sección es la misma, los momentos de inercia de las secciones planas son distintos y por tanto, el comportamiento frente a la flexión.

se tiene que sobre esta fibra actuará una fuerza:

$$dF = E\frac{y}{\rho}dS \tag{1–48}$$

donde dS es un elemento de superficie de la fibra, perpendicular al plano estudiado (y por tanto a la fibra). El momento, tomado respecto del eje horizontal que pasa por la fibra neutra, del conjunto de las fuerzas que actúan a través de la sección MN y originan la flexión es el momento flector en esa sección plana, y tiene un valor:

$$M_f = \int_S y dF = \int_S E\frac{y^2}{\rho}dS = \frac{E}{\rho}I_{zz} = \frac{E\epsilon}{y}I_{zz} = \frac{\sigma}{y}I_{zz} \tag{1–49}$$

donde I_{zz} es el momento de inercia de la sección plana respecto del eje z que pasa por la fibra neutra:

$$I_{zz} = \int_S y^2 dS \tag{1–50}$$

Este momento de inercia depende de la forma y del valor de la sección de la barra, pudiendo ocurrir que para secciones del mismo valor, pero de distinta forma (como las que se muestran en la figura 1–16), las resistencias a la flexión sean muy distintas.

En el caso de flexión plana pura, la fibra neutra estará siempre situada sobre el centro de gravedad de cada sección. Para comprobarlo partiremos del hecho de que la sección está en equilibrio mecánico y por tanto la fuerza total sobre la misma debe ser cero, que junto con la ecuación (1–48), con y respecto de la fibra neutra, nos da

$$\int_S dF = 0 = \int_S \sigma dS = \frac{E}{\rho}\int_S y dS$$

que directamente da

$$\int_S y dS = 0$$

pero por otra parte esa integral es precisamente $S\,y_{cg}$, con y_{cg} la coordenada y del centro de gravedad en el sistema con origen en la fibra neutra. Por tanto $y_{cg} = 0$ es decir, la fibra neutra pasa por el centro de gravedad de la sección plana en el caso de la flexión pura y en realidad para cada sección estamos tomando y como componente y respecto del centro de gravedad de la sección.

Momento flector en flexión plana no pura.

El efecto de los cortantes que aparecen junto al momento flector en flexión simple es el de deformar las superficies inicialmente planas que se han utilizado para el cálculo anterior (Figura 1–15), como se tratará en la página 26. Afortunadamente su efecto en los resultados es despreciable, por lo que lo anterior también puede aplicarse a flexión plana simple.

Si junto a la flexión pura o simple se tiene una tracción o compresión en la dirección longitudinal que preserva la simetría respecto del plano, la tensión total en la dirección longitudinal será

$$\sigma_{xx}^{tot} = \sigma_{xx}^{pura} + \sigma_{xx}^{axil} = \frac{M_{f_z}}{I_{zz}}y + \sigma_{xx}^{axil}. \tag{1–51}$$

En la fibra neutra se cumple $\sigma_{xx}^{tot} = 0$ quedando, con y tomada respecto del centro de gravedad de la sección,

$$y_N = -\frac{I_{zz}}{M_{f_z}}\sigma_{xx}^{axil}. \tag{1–52}$$

Si no hay cortantes sobre el plano transversal el momento flector no varía de una a otra sección transversal. Esto implica que la fibra neutra se desplaza la misma distancia desde la superficie que pasa por el centro de gravedad de las secciones para todas las mismas.

Por el contrario, si hay cortantes, el momento flector no es uniforme y el desplazamiento de la fibra neutra respecto de dicho plano depende del valor del momento flector en cada sección.

Momento flector y curva de deformación.

Obtengamos ahora la ecuación de la *curva de deformación* o *curva elástica*. Para ello analizaremos la curva que se muestra en la figura 1–17 y utilizaremos las relaciones $\rho d\theta = dl \simeq \sqrt{dx^2 + dy^2}$ y $\tan\theta = dy/dx$. Si diferenciamos en ésta última,

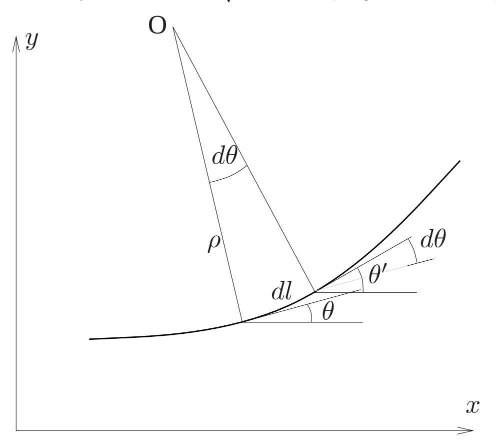


Figura 1–17: Obtención de la ecuación de la curva de deformación o curva elástica.

se tiene

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{d^2y}{dx^2}dx \qquad \Rightarrow \qquad d\theta = cos^2\theta\frac{d^2y}{dx^2}dx$$

que nos permite escribir el elemento de arco $dl = \rho d\theta$ como

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \rho d\theta = \rho\cos^2\theta dx\frac{d^2y}{dx^2},$$

y obtener

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}\cos^2\theta\frac{d^2y}{dx^2},$$

que junto con la clásica ecuación trigonométrica

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

nos da la ecuación de la curva de deformación

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{1–53}$$

con signos $+$ o $-$ dependiendo de la dirección de la curvatura en el sistema de ejes considerado. El signo $+$ corresponde a una curvatura como la que se muestra en la figura 1–17 y el signo $-$ a la contraria.

Para valores pequeños de la pendiente (con nuestra elección de ejes), como ocurre cuando estamos en el límite de pequeñas deformaciones $(dy/dx)^2 \ll 1$ y la ecuación anterior puede escribirse de forma aproximada como

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{d^2y}{dx^2}$$

En estas condiciones de pequeña curvatura la ecuación (1–49) queda

$$M_f = -EI_{zz}\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{1–54}$$

ecuación que nos permite obtener por integración la curva de deformación una vez que conocemos el momento flector $M_f(x)$ e incluimos las condiciones de contorno (nótese que aparecen dos constantes de integración). En esta ecuación hemos puesto el signo explícitamente de modo que todo sea coherente con el convenio de signos definido previamente en la sección 1.2. Así, en la figura, la curvatura positiva que se muestra estaría asociada con un momento flector negativo (parte convexa hacia la parte negativa del eje y).

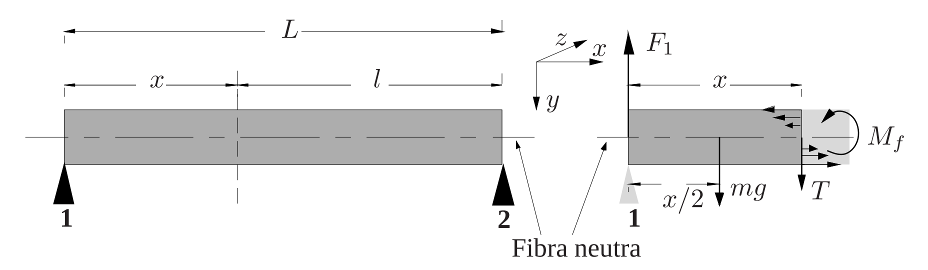


Figura 1–18: Momento flector en una viga biapoyada que pesa. Tomamos la parte de la viga entre el apoyo izquierdo y la sección situada a una distancia x del apoyo izquierdo o a una distancia l del apoyo derecho, y sustituimos la acción del material fuera de este volumen por el sistema de fuerzas equivalente.

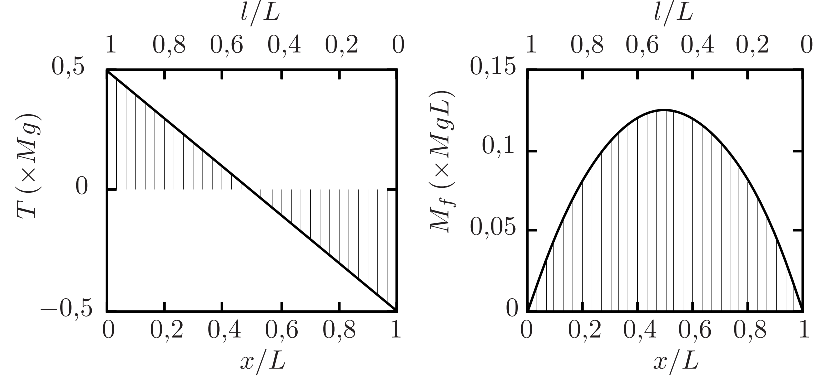


Figura 1–19: Diagramas de la fuerza cortante T y el momento flector M_f para una viga biapoyada sometida únicamente a su propio peso, en función de la distancia x al apoyo izquierdo o de la distancia l al apoyo derecho. Los signos del momento flector y de la fuerza cortante están conformes con el convenio de signos que hemos definido en la sección 1.2.

Flexión en vigas que flectan por su propio peso.

Momentos flectores y fuerzas cortantes. Veamos ahora algunos ejemplos de cálculos de momentos flectores M_f en vigas sometidas a distintas acciones.

Viga biapoyada sometida a su peso. Consideremos en primer lugar el caso de una viga biapoyada, con una masa total M y una longitud L, como la que se muestra en la figura 1–18. En estas condiciones el peso de la viga está repartido por igual entre los dos apoyos,

$$F_1 = F_2 = \frac{Mg}{2}. \tag{1–55}$$

Consideremos una sección imaginaria de la misma a una distancia x del apoyo izquierdo **1**, y a una distancia l del apoyo derecho **2**. Si consideramos el elemento de volumen a la izquierda de la sección (entre esta sección y el apoyo 1), cuya masa es $m = Mx/L$, el equilibrio de fuerzas nos da que

$$F_1 = mg + T,$$

lo que nos permite obtener la fuerza cortante T:

$$T = F_1 - mg \tag{1–56}$$

Por otra parte, si tomamos momentos respecto del punto de aplicación de T, para que haya equilibrio frente a la rotación deberá cumplirse:

$$M_f = xF_1 - \frac{x}{2}mg \tag{1–57}$$

donde la fuerza F_1 sobre el apoyo **1** es la mitad $Mg/2$ del peso total de la viga. Si además tenemos en cuenta la ecuaciones (1–49) y (1–46), la ecuación (1–57) queda

$$M_f(x) = \frac{1}{2}\frac{Mg}{L}x(L-x) = M_f(l) = \frac{1}{2}\frac{Mg}{L}(L-l)l = \frac{E\epsilon}{y}I_{zz} = \frac{\sigma}{y}I_{zz}, \tag{1–58}$$

lo que nos permite escribir la deformación en función de la distancia x al apoyo y de la distancia y a la fibra neutra y obtener, a través de la ley de Hooke $\sigma = E\epsilon$, la expresión de las tensiones normales en función de y y de x (o de y y de l). Este momento flector tiene una dependencia parabólica en x y es nulo en los apoyos y máximo en el centro.

La fuerza cortante total en la sección considerada sería

$$T(x) = g\left(\frac{M}{2} - m\right) = \frac{Mg}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) = T(l) = \frac{Mg}{L}\left(l - \frac{L}{2}\right). \tag{1–59}$$

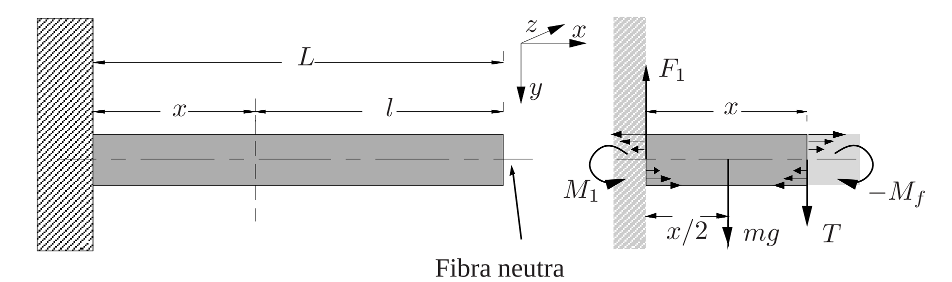


Figura 1–20: Fuerza cortante y momento flector en una viga que pesa empotrada en uno de sus extremos. Para su estudio consideraremos el elemento comprendido entre el empotramiento y una sección que se encuentra a una distancia x del empotramiento y a una distancia l del extremo derecho, sustituyéndose la acción del resto del material por el sistema de fuerzas equivalente.

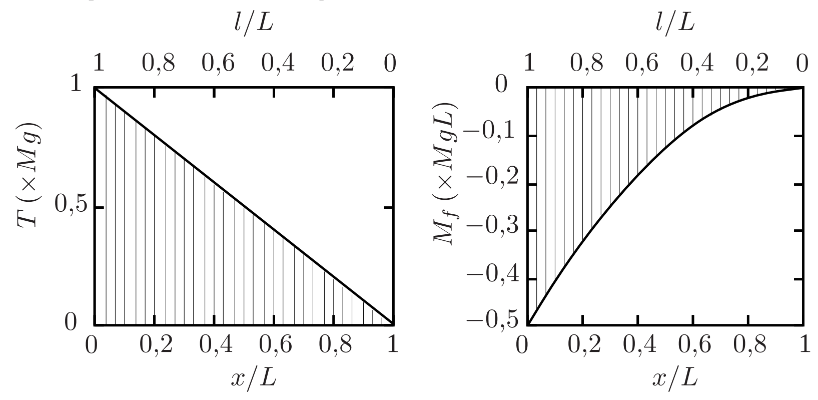


Figura 1–21: Diagramas de fuerzas cortantes T y de momentos flectores M_f para una viga empotrada en uno de sus extremos en función de la distancia x al empotramiento y de la distancia l al extremo libre. Tanto el signo del momento flector como el de la fuerza cortante están conformes con el convenio de signos que hemos definido en la sección 1.2.

Las expresiones de $T(x)$ y $M_f(x)$ que acabamos de obtener están de acuerdo con el convenio de signos que hemos definido en la sección 1.2.

Una vez conocido el momento flector $M_f(x)$ podemos, mediante una doble integración a partir de (1–53), obtener la ecuación de la curva elástica,

$$y(x) = -\frac{Mg}{2LEI_{zz}}\left[\frac{1}{6}Lx^3 - \frac{1}{12}x^4\right] + A_2x + A_1$$

en función de dos constantes de integración A_1 y A_2. Las condiciones de contorno necesarias para obtener A_1 y A_2 son que $y(x)$ debe ser nula en los apoyos,

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0$$
$$y(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{Mg}{2EI_{zz}}\frac{L^2}{12},$$

quedando

$$y(x) = -\frac{Mg}{12LEI_{zz}}\left[-\frac{1}{2}x^4 + Lx^3 - \frac{1}{2}L^3x\right] = \frac{Mg}{24LEI_{zz}}\left[x^4 - 2Lx^3 + L^3x\right] \tag{1–60}$$

Viga empotrada sometida a su peso. Si en vez de ser biapoyada, esa misma viga estuviera empotrada en **1** (Fig. 1–20) la fuerza F_1 de reacción del apoyo sería Mg, y el momento flector en éste $M_1 = \frac{1}{2}LMg$. Tomando momentos respecto del mismo punto que antes tendríamos

$$M_1 + \frac{x}{2}mg = -M_f + xMg$$

Si agrupamos términos y sustituimos el valor de m esta ecuación queda:

$$M_f(x) = -\frac{Mg}{2L}\left[L^2 + x^2 - 2Lx\right] = -\frac{Mg}{2L}(L-x)^2 = M_f(l) = -\frac{Mg}{2L}l^2 = \frac{E\epsilon}{y}I_{zz} = \frac{\sigma}{y}I_{zz} \tag{1–61}$$

En este caso habría resultado más sencillo tomar el elemento de volumen en la parte exterior, pero el resultado es el mismo. Análogamente al caso anterior, de aquí se obtendría la deformación normal en cada punto de la viga y, a través de la ley de

Hooke, la tensión normal en ese punto. La fuerza cortante es $T = F_1 - mg = Mg - mg$, que sustituyendo el valor de m queda:

$$T(x) = Mg\left(1 - \frac{x}{L}\right) = \frac{Mg}{L}(L - x) = T(l) = \frac{Mg}{L}l \tag{1–62}$$

con $T(x)$ y $M_f(x)$ de acuerdo con el convenio de signos que hemos definido en la sección 1.2.

Igual que en la sección anterior podemos, a partir del momento flector $M_f(x)$, obtener mediante una doble integración a partir de (1–53) la ecuación de la curva elástica,

$$y(x) = \frac{Mg}{2LEI_{zz}}\left[\frac{1}{2}L^2x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}Lx^3\right] + A_2x + A_1$$

en función de dos constantes de integración A_1 y A_2. Las condiciones de contorno necesarias para obtener A_1 y A_2 son ahora que tanto la elástica $y(x)$ como su pendiente deben ser nulas en el empotramiento,

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0$$
$$y(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 0,$$

quedando

$$y(x) = \frac{Mg}{2LEI_{zz}}\left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}Lx^3 + \frac{1}{2}L^2x^2\right] = \frac{Mg}{24LEI_{zz}}\left[x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2\right] = \frac{Mg}{24LEI_{zz}}\left[l^4 - 4L^3l + 3L^4\right]. \tag{1–63}$$

Debe recordarse que en las expresiones (1–60) y (1–63) la parte positiva del eje y apunta hacia abajo, de acuerdo con nuestro criterio de elección de ejes y de signos de los momentos flectores.

Vigas sometidas a cargas distribuidas. Si además de su peso hubiera una carga distribuida sobre la viga habría que sustituir Mg/L por la carga total por unidad de longitud en la viga, donde ya estarían incluidos tanto el peso como la carga extra. Si en vez de carga distribuida, o además de ella, hubiera cargas puntuales en ciertas posiciones, habría que incluirlas en las expresiones de los momentos y de las fuerzas cortantes, en un proceso similar al anterior, obteniéndose una serie de expresiones válidas cada una de ellas en un cierto rango. En este caso sería necesario rehacer todos los cálculos en los distintos rangos entre las distintas cargas puntuales, como se hace en el siguiente ejemplo.

Viga empotrada sometida a carga uniformemente distribuida y a cargas puntuales. Consideremos ahora el caso que se presenta en la figura 1–22, en el que se tiene una viga de longitud L sometida por un lado a una carga distribuida uniformemente, y por otro lado a un par de cargas puntuales P_1 y P_2 situadas en x_1 y L. Está claro que en este caso tendremos dos regiones de comportamiento diferenciado, dependiendo de si estamos observando una sección antes de la carga puntual P_1 o entre las dos cargas puntuales.

Comencemos calculando el valor de la fuerza F_1 de reacción en el empotramiento y el momento M_1 en el mismo. La fuerza F_1 en el empotramiento será

$$F_1 = Mg + P_1 + P_2 \tag{1–64}$$

y el momento en el empotramiento

$$M_1 = \frac{L}{2}Mg + x_1P_1 + LP_2 \tag{1–65}$$

y veamos qué ocurre en cada región:

$\boxed{0 \leq x \leq x_1}$

Considerando la sección que se muestra en la parte derecha de la figura 1–22, la condición de equilibrio de fuerzas aplicada a esa sección da

$$F_1 = Mg + P_1 + P_2 = mg + T = \frac{x}{L}Mg + T$$

de donde se obtiene la fuerza cortante en ese intervalo

$$T(x) = (L - x)\frac{Mg}{L} + P_1 + P_2 = l\frac{Mg}{L} + P_1 + P_2 \tag{1–66}$$

Para obtener el momento flector se tiene la ecuación de equilibrio de momentos,

$$M_1 = \frac{L}{2}Mg + x_1P_1 + LP_2 = \frac{x}{2}mg + xT - M_f$$

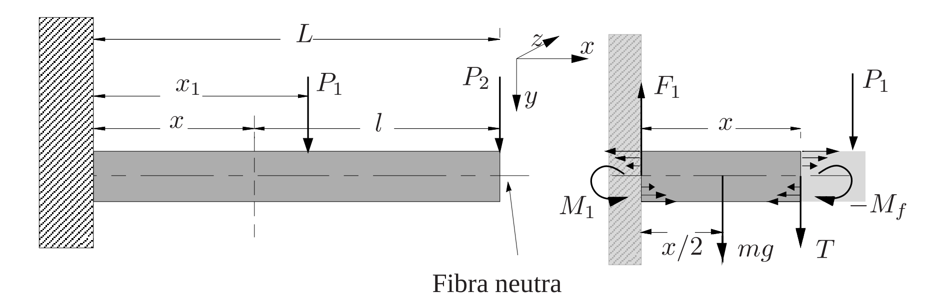


Figura 1–22: Fuerza cortante y momento flector para de una viga empotrada que pesa y está además sometida a dos cargas puntuales P_1 y P_2.

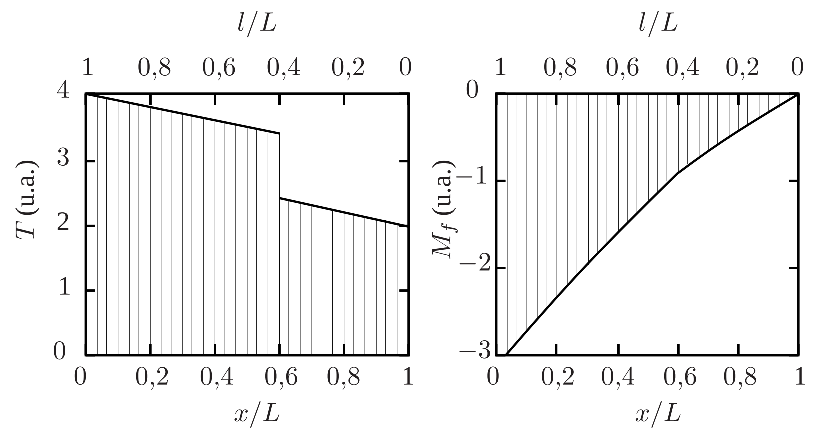


Figura 1–23: Diagramas de fuerzas cortantes T y momentos flectores M_f para una viga con peso empotrada en uno de sus extremos y sobre la que actúan además dos cargas puntuales P_1 y P_2, en función de la distancia al empotramiento l y de la distancia x al extremo libre. Como P_1 y P_2 dependen de cada caso los valores se dan en unidades arbitrarias (u.a.). Tanto el signo del momento flector como el de la fuerza cortante están conformes con el convenio de signos que hemos definido en la sección 1.2.

que sustituyendo $m = Mx/L$ y $T(x)$ por el valor anterior nos da

$$M_f(x) = (x - x_1)P_1 + (x - L)P_2 - \frac{Mg}{2L}(L - x)^2 \tag{1–67}$$

$x_1 \leq x \leq L$

En este caso la condición de equilibrio de fuerzas para el volumen de control correspondiente es

$$F_1 = Mg + P_1 + P_2 = mg + T + P_1 = \frac{x}{L}Mg + T + P_1$$

quedando la fuerza cortante

$$T(x) = (L - x)\frac{Mg}{L} + P_2, \tag{1–68}$$

mientras que la condición de equilibrio de momentos es

$$M_1 = \frac{L}{2}Mg + x_1 P_1 + LP_2 = \frac{x}{2}mg + xT + x_1 P_1 - M_f$$

quedando el momento flector

$$M_f(x) = (x - L)P_2 - \frac{Mg}{2L}(L - x)^2 \tag{1–69}$$

Relación entre la fuerza cortante y la variación del momento flector . Antes de obtener cómo es la distribución de tensiones cortantes en la sección, obtendremos algunas relaciones previas importantes. Para ello, estudiaremos el equilibrio de fuerzas en un elemento de volumen de la viga situado en una zona de carga distribuida entre dos cargas puntuales (es decir, que no está en un punto en el que la carga cambia bruscamente), como la que se muestra en la figura 1–24b. Este elemento de volumen tiene una anchura dx y el momento flector y la fuerza cortante varían en dM_f y dT respectivamente entre uno y otro extremo. Sobre este elemento actúa una carga distribuida p por unidad de longitud (si solamente es su peso, $p = g\,dm/dx$) que consideramos aplicada en el centro del elemento de volumen. El equilibrio de momentos respecto del punto O da

$$M_f + dM_f + \frac{dx}{2}p\,dx = M_f + T dx \qquad \Rightarrow \qquad dM_f - T dx = \frac{1}{2}p(dx)^2 \qquad \Rightarrow \qquad T(x) = \frac{dM_f(x)}{dx} + \frac{1}{2}p dx$$

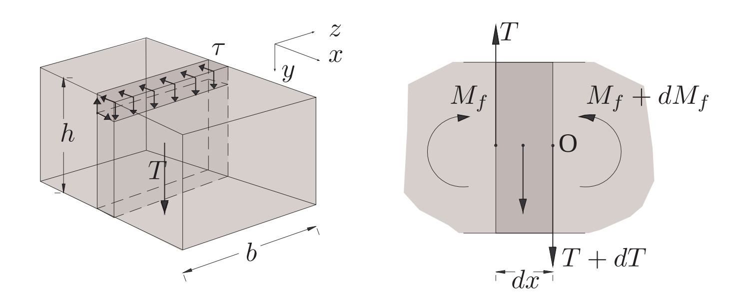


Figura 1–24: Tensiones cortantes en vigas flexionadas.

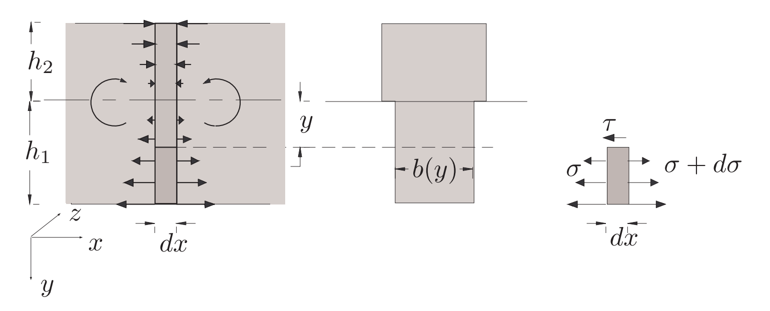


Figura 1–25: Cálculo de las tensiones cortantes en vigas flexionadas.

y despreciando el infinitésimo de la parte derecha, se tiene la relación

$$T(x) = \frac{dM_f(x)}{dx} \tag{1–70}$$

que muestra claramente que la presencia o no de una fuerza cortante está relacionada con la uniformidad del momento flector a lo largo del eje x.

Distribución de tensiones cortantes. La fuerza cortante $\vec{T}_y$ en una viga flexionada dada por las ecuaciones (1–59) o (1–62) se repartiría en la sección de forma que la distribución de tensiones cortantes asociada satisfaga la relación

$$T = \int_S \sigma dS \tag{1–71}$$

. Esta distribución no puede ser uniforme (sería entonces el cociente entre las fuerzas cortantes y la sección de la viga), sino que debe ser una distribución más compleja con un valor nulo en la superficie exterior. Para ver esto, consideremos un pequeño elemento de volumen como el que se muestra en la figura 1–24a. Para que haya equilibrio frente a la rotación, si hay tensiones cortantes en las caras verticales, deberá haberlas también en las horizontales, de forma que sus momentos se compensen. En concreto, si este elemento de volumen se toma con un lado en la superficie externa, debiera haber una fuerza cortante en ésta, pero no hay fuerzas actuando sobre esa superficie, por lo que a la altura de la superficie externa tampoco habrá fuerzas cortantes en la cara vertical.

Pasemos ahora al cálculo de la distribución de tensiones cortantes. Para ello consideremos el elemento de volumen que se presenta en la figura 1–25, de anchura dx y con caras horizontales una en la parte externa y otra en la parte interna, y dentro de éste la parte situada debajo de la fibra que se encuentra a una distancia y de la fibra neutra. Sobre la cara interna de ésta actuará una tensión cortante[†] τ en general distinta de cero. Las fuerzas normales que actúan sobre las caras izquierda y derecha del elemento son, respectivamente:

$$F_\sigma = \int_y^{h_1} \sigma dS = \int_y^{h_1} \frac{yM_f}{I_{zz}} dS$$

$$F_{\sigma+d\sigma} = \int_y^{h_1} (\sigma + d\sigma) dS = \int_y^{h_1} \frac{y(M_f + dM_f)}{I_{zz}} dS$$

[†]Nótese que esta tensión τ está medida a una distancia finita $h_1 - y$ de la superficie externa inferior y por tanto no tiene por que ser cero, al contrario de lo que ocurría en el elemento de volumen infinitesimal de la figura 1–24.

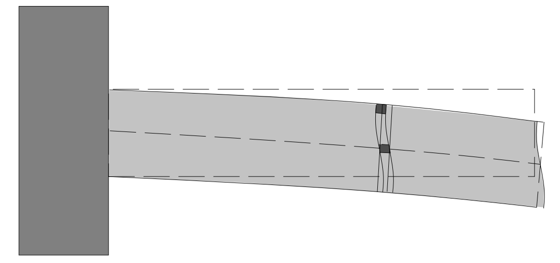


Figura 1–26: Al aparecer una distribución de tensiones cortantes en las secciones, éstas no se mantienen planas, sino que se alabean.

La condición de equilibrio de fuerzas da entonces, en la dirección horizontal:

$$\tau b dx = \int_y^{h_1} \frac{y(M_f + dM_f)}{I_{zz}} dS - \int_y^{h_1} \frac{yM_f}{I_{zz}} dS = \int_y^{h_1} \frac{ydM_f}{I_{zz}} dS$$

de donde la distribución de tensiones cortantes queda, teniendo en cuenta que el momento flector se refiere a la sección y por tanto, puede sacarse de la integral,

$$\tau(x,y) = \frac{dM}{dx} \frac{1}{b\, I_{zz}} \int_y^{h_1} ydS = \frac{T(x)}{b\, I_{zz}} \int_y^{h_1} ydS \tag{1–72}$$

Para el caso concreto de una viga de sección rectangular de anchura b y altura h el momento de inercia de la sección plana es $I_{zz} = bh^3/12$, las alturas h_1 y h_2 son ambas $h/2$ y la distribución de tensiones cortantes queda

$$\tau(x,y) = \frac{12T(x)}{b^2h^3} \int_y^{h_1} ybdy = \frac{6T(x)}{bh^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \tag{1–73}$$

que es una parábola que se hace cero para $y = \pm\frac{1}{2}h$ y tiene un valor máximo $3T/(2bh)$ para $y = 0$, y además debe cumplir (1–71). En la expresión anterior está incluida la dependencia en l a través de la fuerza cortante $T(l)$. La consecuencia de esta distribución de tensiones cortantes es que las secciones que originalmente eran planas se alabean. Desde un punto de vista riguroso esto hace que el estudio analítico que hemos hecho de las tensiones normales durante la deformación por flexión plana deje de ser válido, ya que estaba basado en que las secciones se mantenían planas durante la deformación. Afortunadamente, el efecto de tener en cuenta este alabeo en el cálculo de las tensiones normales es muy pequeño y por tanto, aunque las secciones realmente se alabeen, se realizan los cálculos de las tensiones normales como si estas superficies se mantuvieran planas durante la deformación. Esta suposición se denomina *Hipótesis de Navier* y es también una de las hipótesis habituales en la Resistencia de Materiales. Asimismo, si la sección es originalmente rectangular y el elemento no es fino, se tiene que ésta deja de ser rectangular durante la deformación y sus picos se redondean, como se ve fácilmente deformando una goma de borrar prismática y no fina. Esto hace que la validez de nuestros cálculos será peor en esas condiciones y mejor cuando estamos en las condiciones de barras o láminas finas.

En un estudio más riguroso del problema, también hay que tener en cuenta las tensiones normales que aparecen en la dirección vertical, debidas al peso de la viga o a la carga que actúa sobre la misma, cuyo valor se muestra en el apéndice B.

Capítulo 2
El tensor de tensiones

2.1. Introducción

Se ha visto en el primer tema un estudio fenomenológico macroscópico del comportamiento de un material deformable isótropo frente a la acción de un sistema de fuerzas que le deforman. Para ello se ha definido la tensión elástica a través de una superficie mediante una fuerza macroscópica por unidad de superficie a través de la superficie y la deformación elástica como la variación relativa de la longitud, de forma también macroscópica.

Sin embargo, las magnitudes macroscópicas anteriormente definidas a menudo no reflejan fielmente la situación que tiene lugar en la escala microscópica. En general, la tensión o fuerza por unidad de superficie dependerá del punto concreto en el que se estudia, ya que la mayor parte de los estados de tensiones reales son inhomogéneos. Por tanto, para describir el estado de tensiones en un punto del material es necesario estudiar las tensiones a través de elementos diferenciales de superficie alrededor del punto objeto de estudio. Si se toman estos elementos de superficie según las diversas caras perpendiculares a los ejes coordenados, las fuerzas (por unidad de superficie) que actúan a través de estas caras nos darán información acerca del estado de tensiones alrededor de ese punto. En este tema también veremos que las componentes de estas fuerzas por unidad de superficie ordenadas de cierta forma se transforman como las componentes de un tensor de segundo orden, con las consecuencias que esto implica.

2.2. Concepto de vector tensión. Componentes de la tensión y su signo.

Como hemos visto en el capítulo anterior, cuando un sistema de fuerzas externo actúa sobre un cuerpo deformable, todos los elementos de volumen del cuerpo sufren la acción de dicho sistema de fuerzas. Se dice que el cuerpo está en un *estado de tensión*.

Sobre este cuerpo pueden actuar dos tipos de fuerzas. Las *fuerzas de masa* son aquéllas que actúan sobre todos los elementos del cuerpo, y cuya magnitud es proporcional al volumen del elemento. En elasticidad, la fuerza de masa que aparece típicamente es la fuerza gravitatoria. Caracterizaremos la acción de estas fuerzas de masa mediante la fuerza por unidad de masa (con dimensiones de aceleración) y el momento por unidad de masa. Las *fuerzas de superficie* son aquéllas que son proporcionales al área de la superficie sobre la que se aplican, como por ejemplo, la fuerza ejercida por un líquido sobre una pared sólida. En elasticidad encontraremos las fuerzas que actúan a través de un plano en un cuerpo tensionado por la acción de un sistema de fuerzas externo y las caracterizaremos a través de la *tensión* o intensidad de la fuerza. Las ecuaciones de equilibrio deberán tener en cuenta el efecto de ambas.

Denominamos *tensión elástica* en un punto P a través de un plano a la fuerza por unidad de superficie que actúa entre las dos partes en que el plano real o imaginario divide al material tensionado. La tensión elástica se representa por el *vector tensión* o de *esfuerzos*, fuerza por unidad de superficie (para una pequeña superficie en torno a P) ejercida desde fuera del plano real o imaginario (hacia donde apunta el vector superficie) sobre el material del otro lado del plano. El vector tensión caracteriza el esfuerzo en el punto P a través de cada plano.

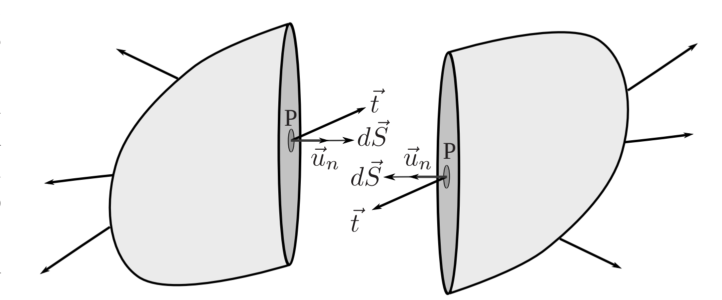


Figura 2–1: Vector tensión a través de un plano que separa dos partes de un cuerpo tensionado visto desde los dos lados.

Para caracterizar el estado tensional en un punto de un material tensionado estudiaremos las distintas componentes del vector tensión elástica en ese punto a través de los planos coordenados (que son perpendiculares entre sí) que pasan por dicho punto, como se muestra en la figura 2–2, con el convenio de signos indicado en la misma. En estos temas denominaremos τ_{ij} a la tensión en la dirección i ejercida a través de la cara j por el material de fuera del cubo sobre el material de dentro del mismo. Hasta ahora hemos utilizado la notación σ cuando trabajamos con tensiones normales (tensiones perpendiculares a la cara sobre la que se aplican, o sea, $i = j$ y por tanto sería σ_{ii}). Sin embargo lo que realmente muestra si estamos tratando con una tensión normal o tangencial es el

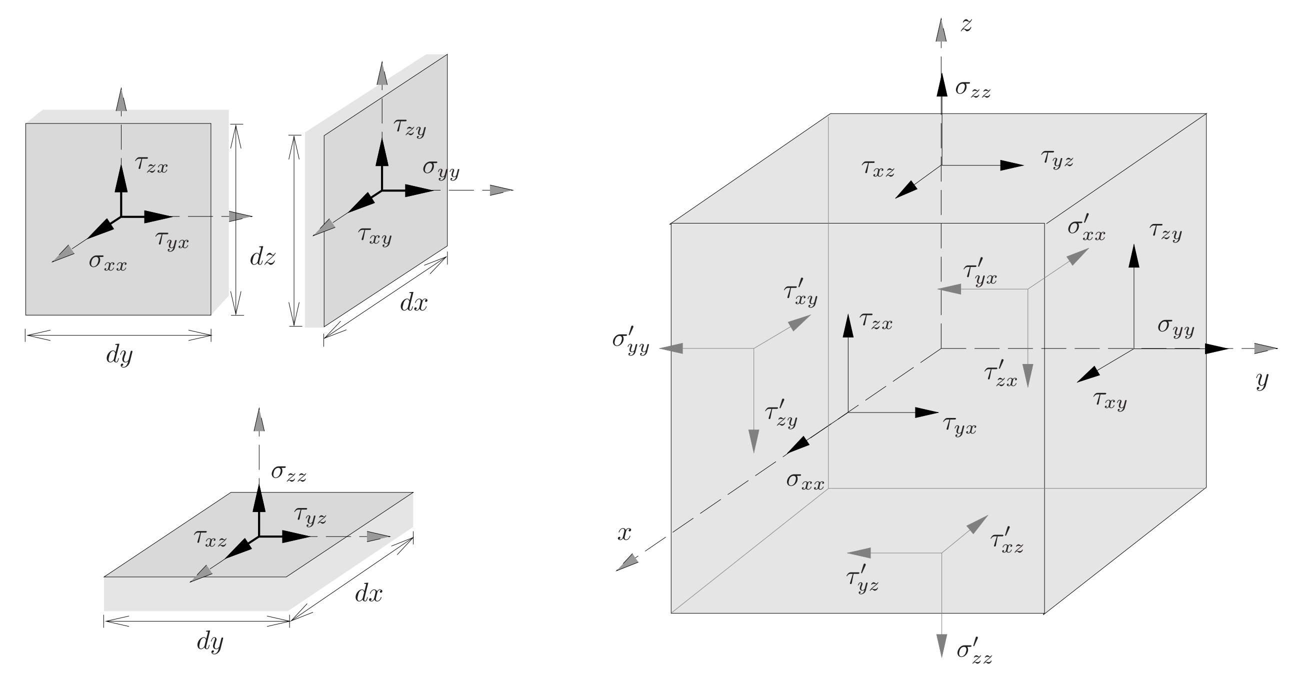


Figura 2–2: En la parte izquierda de la figura se muestra como se definen las componentes del vector tensión según los ejes coordenados del vector tensión a través de superficies perpendiculares a los ejes coordenados que pasan por el punto, para representar el estado de tensiones en el entorno de un punto de un material tensionado. Esto da unas componentes σ_{ii} normales a cada cara y unas componentes τ_{ij} tangentes a cada cara (cortantes). El sentido que se muestra es el positivo. En la parte derecha se muestran las componentes del vector tensión a través de las distintas caras de un elemento prismático con aristas según los ejes coordenados. La tensión a través de cada cara se descompone en componentes según los ejes coordenados, con el sentido positivo de las componentes el mostrado en las caras anteriores (para las caras opuestas el sentido positivo es el opuesto).

hecho de que los subíndices sean iguales (en cuyo caso tendríamos tensiones normales) o distintos (en cuyo caso tendríamos tensiones tangenciales), por lo que a partir de ahora utilizaremos indistintamente las dos notaciones, siendo la igualdad o no de subíndices la que realmente indica si se trata de una componente normal o tangencial.

2.3. Ecuaciones de equilibrio

Analizaremos ahora cómo varían en el espacio las magnitudes que acabamos de definir, en los casos de tensiones homogéneas e inhomogéneas, a partir de las ecuaciones de equilibrio mecánico.

2.4. Estado homogéneo de tensiones

Se tiene un estado de tensiones homogéneo cuando la tensión en una dirección dada es independiente del punto del material. Para *tensiones homogéneas*, en el equilibrio mecánico y en ausencia de fuerzas de masa, se tienen los siguientes resultados:

Equilibrio de fuerzas: La fuerza a través de una cara es de idéntica magnitud y sentido contrario a la correspondiente fuerza en la cara opuesta. Esto implica que en la figura 2–2 $\sigma_{xx} = \sigma'_{xx}$ la tensión σ_{xx} correspondiente a la cara $+x$ es idéntica a la tensión σ'_{xx} correspondiente a la cara opuesta $-x$. Como ya hemos visto, a la hora de hablar de tensiones elásticas al estado de tensiones producido por este sistema de fuerzas se le da un signo positivo si es de tracción y negativo si es de compresión, aunque las fuerzas en sí tengan distintos sentidos.

Del mismo modo que antes, la fuerza tangencial F_{ij} en la cara Oi representada en la figura y la fuerza F'_{ij} en la cara opuesta Oi' son iguales y de sentido contrario. Esto implica que las tensiones elásticas τ_{ij} en ambas caras son iguales, $\tau_{ij} = \tau'_{ij}$.

Equilibrio de momentos: Aunque las fuerzas sobre una cara y sobre la opuesta dan una fuerza resultante nula, el momento debido a este par de fuerzas no es nulo. Para que haya equilibrio de momentos, es necesario que se cumpla la condición $M_{ij} = M_{ji}$, donde M_{ij} es el momento producido por el par F_{ij}, es decir el momento de uno de los pares de fuerzas considerados debe estar compensado por el momento del otro par de fuerzas. Teniendo en cuenta los brazos de los dos pares de fuerzas esto se traduce en la condición $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ para un estado homogéneo de tensiones.

2.5. Estado inhomogéneo de tensiones

En este caso más general de *tensiones inhomogéneas*, la tensión elástica varía de un punto a otro y por tanto, no puede considerarse uniforme, sino que es necesario tener en cuenta su variación en el espacio. Para analizar este problema, utilizaremos un elemento de volumen infinitesimal como el que se muestra en la figura 2–3.

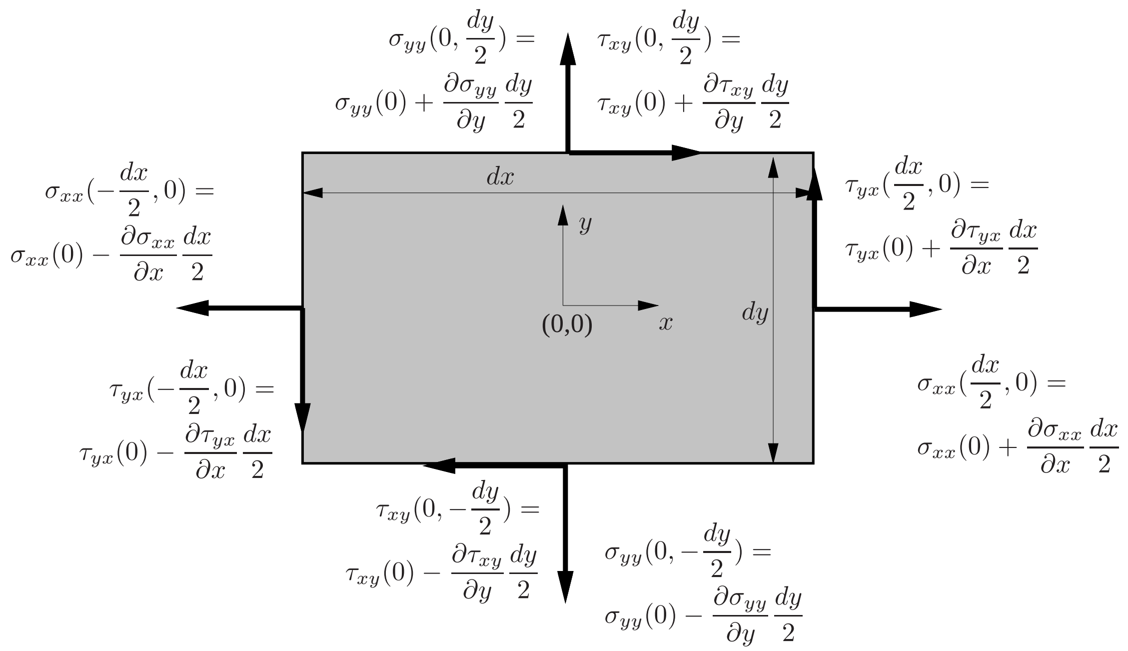


Figura 2–3: Equilibrio de fuerzas para tensiones inhomogéneas en un elemento de volumen prismático diferencial con aristas orientadas según los ejes coordenados. En este caso, el estado tensional varía de un punto a otro. Como las dimensiones del elemento de volumen son infinitesimales, se desarrolla la tensión en torno al valor en el centro del elemento.

Comenzaremos estudiando las condiciones de *equilibrio traslacional*. En la dirección x la fuerza cortante total sobre la cara y, dF_{xy}, es:

$$\begin{aligned} dF_{xy} &= -\left(\tau_{xy}(0) - \frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}dy\right)dzdx + \left(\tau_{xy}(0) + \frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}dy\right)dzdx = \\ &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}dxdydz \end{aligned} \tag{2–1a}$$

y análogamente para la fuerza cortante dF_{xz}:

$$dF_{xz} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}dxdydz \tag{2–1b}$$

y para la fuerza normal dF_{xx}:

$$dF_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dxdydz \tag{2–1c}$$

quedando, para la fuerza total por unidad de volumen en la dirección x, una vez sumados los efectos de las fuerzas cortantes y normales, y añadida una contribución debida a las posibles fuerzas de masa, la ecuación de movimiento:

$$\frac{dF_x}{dV} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho g_x = \rho\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2–2}$$

y análogamente en las direcciones y y z, donde g_x es la componente de la fuerza por unidad de masa debida a fuerzas de masa y d^2x/dt^2 la componente x de la aceleración con que se mueve el cuerpo considerado. Como hay equilibrio mecánico, no hay aceleración y $\partial^2\vec{r}/\partial t^2 = 0$, y se tienen las ecuaciones de equilibrio traslacional:

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial r_i} + \sum_{i\neq j}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial r_j} + \rho g_i = 0 \tag{2–3}$$

Un ejemplo de tensiones normales que varían en una dirección sería el caso de la acción del peso, un ejemplo de tensiones cortantes en una dirección que varían al cambiar de sección lo tendríamos en la distribución de tensiones cortantes asociadas a fuerzas cortantes variables que aparecen en la sección 1.7.2.

Por ejemplo, para un elemento vertical sometido exclusivamente a su peso, se tendría una única componente de aceleración debida a las fuerzas de masa, $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, por lo que las ecuaciones anteriores se convertirían en

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho g = 0$$

al no haber tensiones cortantes. Las dos primeras ecuaciones implicarían que la tensión elástica es uniforme en las direcciones x e y, mientras que la tercera da para la tensión una dependencia

$$\sigma_{zz}(z) = \sigma_{zz}^0 + \rho g(z - z_0) \tag{2–4}$$

si la tensión en z_0 es σ_{zz}^0. Por ejemplo, para el caso de un pilar de altura L y densidad ρ, esto daría una tensión vertical de la forma $\sigma = \rho g(z - L)$ (negativo, como corresponde a una compresión) y tensiones horizontales nulas.

En cuanto al *equilibrio rotacional*, estudiaremos los momentos de los distintos pares de fuerzas que actúan. Considerando los pares de fuerzas que dan un momento en la dirección x, como se ve en la figura 2–4, se obtiene que el momento de las fuerzas F_{yz} y F_{zy} respecto del eje x es:

$$\left(\tau_{zy}(0) - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}\frac{1}{2}dy\right) dxdz\frac{1}{2}dy + \left(\tau_{zy}(0) + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}\frac{1}{2}dy\right) dxdz\frac{1}{2}dy = \\ = dM_{zy} = \tau_{zy}dxdydz \tag{2–5}$$

para las τ_{zy}, y una expresión similar para las τ_{yz}:

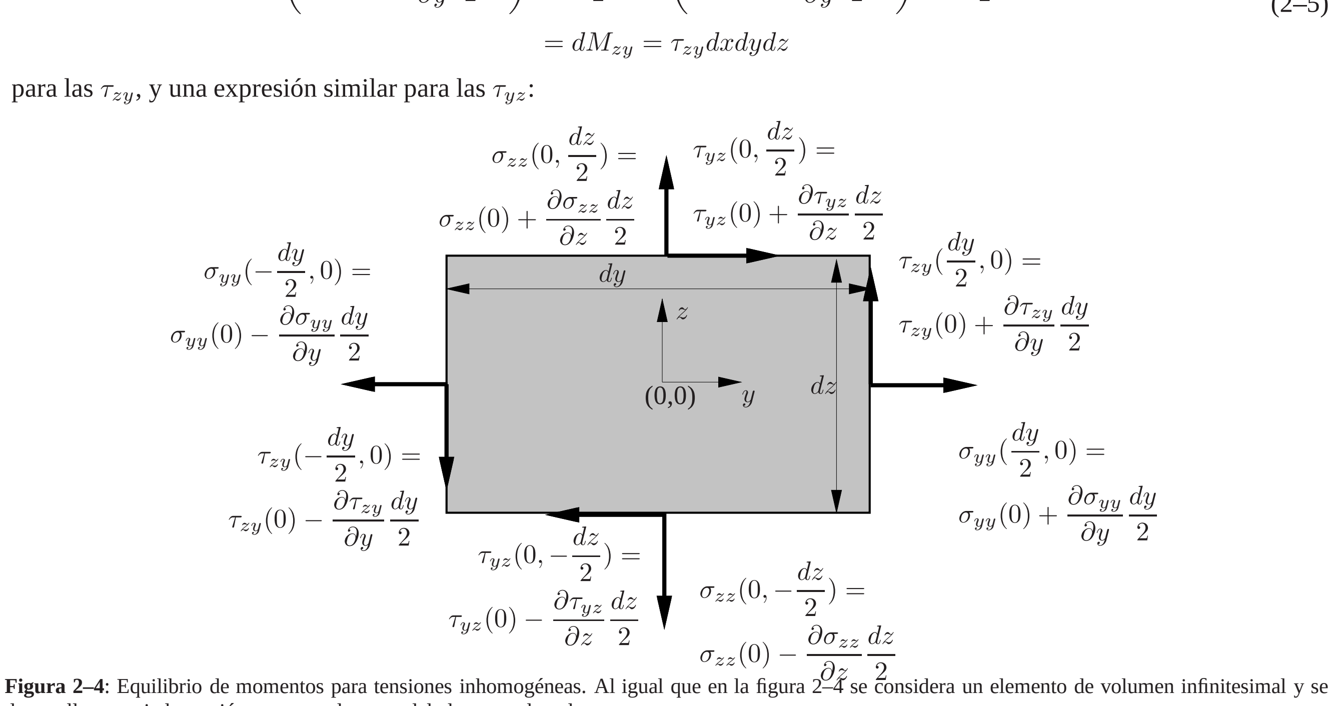


Figura 2–4: Equilibrio de momentos para tensiones inhomogéneas. Al igual que en la figura 2–4 se considera un elemento de volumen infinitesimal y se desarrolla en serie la tensión en torno al centro del elemento de volumen.

$$dM_{yz} = -\tau_{yz}dxdydz \tag{2–6}$$

quedando la ecuación de movimiento rotacional respecto del eje x en la forma:

$$(\tau_{zy} - \tau_{yz})\, dxdydz + G_x dxdydz = dI_{xx}\frac{d^2\theta_x}{dt^2} \tag{2–7}$$

donde G_x es el momento por unidad de volumen debido a las fuerzas de masa en la dirección x, e I_{xx} el momento de inercia del cuerpo sólido respecto del eje x, $I_{xx} = \int_V \rho y^2 dV$, que va como $\sim \rho dx^5$, infinitésimo de quito orden, al integrar a un volumen infinitesimal. En el mismo límite infinitesimal, $dxdydz$ va como dx^3, como un infinitésimo de tercer orden, y por tanto, a no ser que $\tau_{zy} - \tau_{yz} + G_x$ sea cero, $d^2\theta_x/dt^2$ debería hacerse infinito por el simple hecho de tomar el límite infinitesimal en las dimensiones del problema, lo que es absurdo, luego se cumple que:

$$\begin{aligned} \tau_{zy} - \tau_{yz} + G_x = 0 \\ \tau_{xz} - \tau_{zx} + G_y = 0 \\ \tau_{yx} - \tau_{xy} + G_z = 0 \end{aligned} \tag{2–8}$$

donde ya se ha incluido el resultado que se obtiene para los ejes y y z. Sólo existe un momento debido a las fuerzas de masa en algunos casos muy especiales, como cuando hay un campo eléctrico o magnético actuando sobre un material anisótropo que se polariza o magnetiza bajo la acción del campo correspondiente. Así, en ausencia de estas situaciones, se tiene la importante relación:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \tag{2–9}$$

es decir, las τ_{ij} son simétricas también en el caso de un sistema de tensiones inhomogéneas.

2.6. El tensor de tensiones

Hemos estado trabajando hasta ahora con las magnitudes σ_{ii} y τ_{ij} y viendo cuál es su significado como componentes de la tensión a través de una superficie. Veremos ahora que estas componentes, a las que en general llamaremos $[\tau_{ij}]$, colocadas de cierta forma, se transforman como las componentes de un tensor de segundo orden. Para ello será suficiente demostrar que correlacionan dos magnitudes vectoriales $\vec{p}$, $\vec{q}$ (que representan cada una una magnitud física) en la forma $p_i = \sum_{i,j} T_{ij} q_j$, ya que la ecuación debe ser invariante bajo rotación del sistema de ejes.

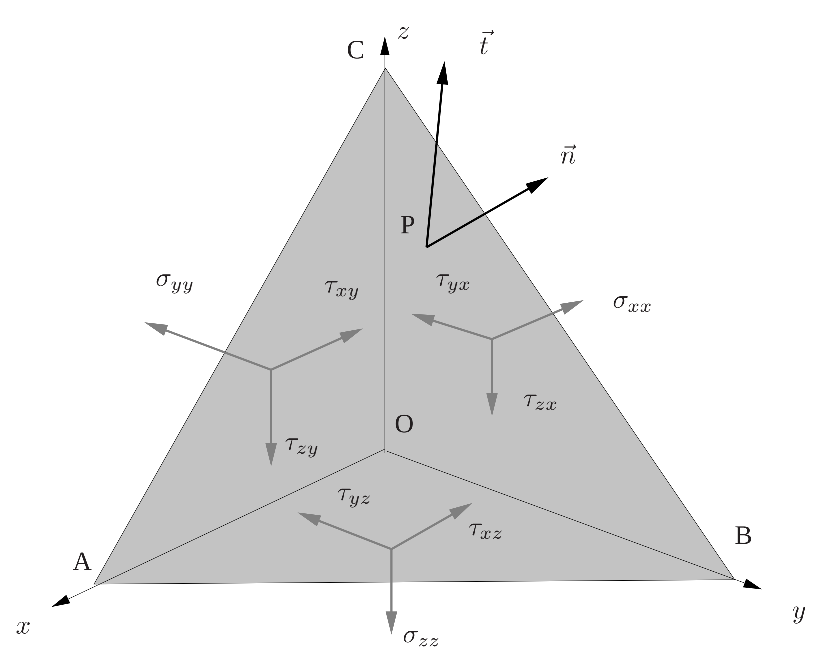


Figura 2–5: Para demostrar que las $[\tau_{ij}]$ forman un tensor de segundo orden se considera el equilibrio de fuerzas en el elemento de volumen limitado por una parte por un plano que pasa por un punto P, con una orientación descrita por un vector unitario normal n y por otra por los planos coordenados. A través de cada cara actúan las correspondientes tensiones con sus componentes y a través del plano la tensión dada por el vector tensión $\vec{t}$.

Si tomamos una superficie elemental dS, que contiene un punto P en el cuerpo tensionado, y denominamos $\vec{n}$ al vector unitario normal a la superficie y $\vec{t}$ al vector tensión, que representa la tensión total transmitida a través de la superficie (de carácter vectorial), tendremos que $\vec{t}dS$ será la fuerza total transmitida a través de la superficie.

¿Cómo cambia esta fuerza al variar la dirección de $\vec{n}$ de forma que siempre pase por el punto P? Para abordar este problema, consideraremos el caso de:

- Tensión homogénea.
- No hay fuerzas de masa.
- El cuerpo está en equilibrio.

y veremos las consecuencias de este equilibrio. Denominaremos ABC a la superficie triangular variable perpendicular a $\vec{n}$ y BOC, AOC y AOB a las otras caras triangulares. En la dirección x:

$$\begin{gathered} t_x \mathrm{ABC} = \sigma_{xx}\mathrm{BOC} + \tau_{xy}\mathrm{COA} + \tau_{xz}\mathrm{BOA} \rightarrow \\ \rightarrow t_x = \sigma_{xx}\frac{\mathrm{BOC}}{\mathrm{ABC}} + \tau_{xy}\frac{\mathrm{COA}}{\mathrm{ABC}} + \tau_{xz}\frac{\mathrm{BOA}}{\mathrm{ABC}} \end{gathered} \tag{2–10}$$

pero como cada uno de los cocientes entre las superficies no es sino cada una de las componentes del vector $\vec{n}$, o lo que es lo mismo, cada uno de los cosenos directores de $\vec{n}$, se tiene, al repetir el proceso para las demás direcciones:

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ t_y &= \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z \\ t_z &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{aligned} \tag{2–11}$$

o, en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \tag{2–12}$$

o vectorial:

$$t_i = \sum_j \tau_{ij} n_j \quad \Leftrightarrow \quad \vec{t} = [\tau_{ij}]\vec{n} \tag{2–13}$$

es decir, se transforman como las componentes de un tensor de segundo orden. Así, este *tensor de tensiones* nos permite además de caracterizar el estado de tensiones en un punto, obtener el vector tensión $\vec{t}$ a través de cualquier plano que pasa por un punto conociendo en éste el tensor de tensiones y el vector unitario perpendicular al plano. Según la componente del vector tensión a lo largo del vector unitario que describe el plano hacia fuera (dada por $\vec{t} \cdot \vec{n}$) sea positiva o negativa ese vector tensión llevará asociada una tracción o a una compresión.

Para el caso de tensión inhomogénea, esta expresión también es válida, ya que los términos adicionales desaparecen al tomar el límite infinitesimal.

El tensor así obtenido es simétrico, por lo que existen unos ejes en los que éste es diagonal con todos los autovalores reales:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{2–14}$$

donde σ_1, σ_2 y σ_3 son las tensiones principales. Cuando se escogen estas direcciones como ejes, las componentes cortantes desaparecen, quedando únicamente las componentes normales, es decir, las fuerzas sobre las caras de un cubo orientado según esas direcciones son perpendiculares a las caras.

Asimismo, la traza del tensor, la suma de los determinantes de los menores complementarios de los elementos de la diagonal y el determinante del tensor son invariantes bajo rotación del sistema de ejes.

En general, la fuerza elástica resultante de las fuerzas que ejerce el resto del cuerpo tensionado sobre un elemento de volumen del cuerpo a través de la superficie cerrada S que le rodea viene dada por

$$\vec{F} = \int_S \vec{t} dS, \tag{2–15}$$

la suma de las fuerzas elementales sobre cada elemento de la superficie, donde dS es cada una de las áreas infinitesimales y $\vec{t}$ el vector tensión a través de la misma.

2.7. Superficie indicadora o cuádrica de tensiones

La forma cuadrática (Véase la sección A.4.6) asociada al tensor de tensiones es el lugar geométrico de los puntos que cumplen la condición:

$$\sum_{i,j} \tau_{ij} r_i r_j = 1 \tag{2–16}$$

que, expresado respecto de los ejes principales del tensor de tensiones queda en la forma:

$$\sigma_1 r_1^2 + \sigma_2 r_2^2 + \sigma_3 r_3^2 = 1 \tag{2–17}$$

siendo las longitudes de los semiejes $1/\sqrt{\sigma_1}$, $1/\sqrt{\sigma_2}$ y $1/\sqrt{\sigma_3}$. Los valores de σ_1, σ_2 y σ_3 pueden ser positivos o negativos, y por tanto la cuádrica puede ser un elipsoide real o imaginario, o un hiperboloide.

Para sacar la dirección del vector tensión resultante $\vec{t}$ a través de un área pequeña $\delta\vec{S}$ se sigue el procedimiento descrito en la sección A.4.6:

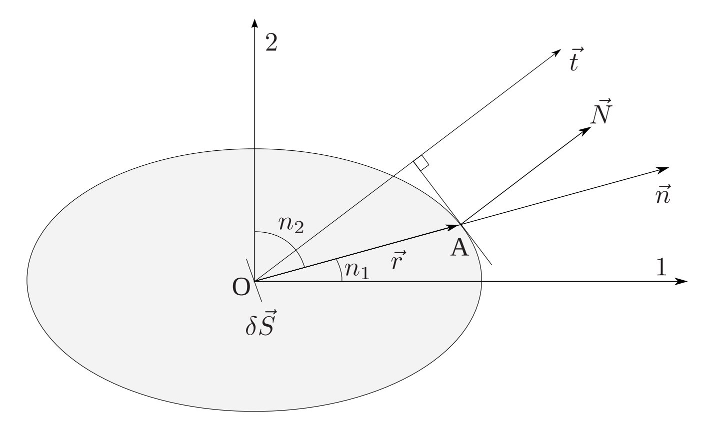


Figura 2–6: Forma cuadrática asociada al tensor de tensiones.

1. Se dibuja un vector $\vec{r}$ desde el origen de coordenadas en el centro del elipsoide hasta la superficie de la cuádrica, de forma que éste sea paralelo a $\vec{n}$ (vector unidad perpendicular a δS), que cortará a la cuádrica en A.

2. El vector $\vec{t}$ será paralelo a la normal a la cuádrica en A.

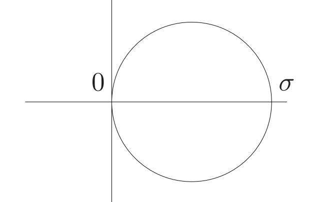
Siempre que A caiga en uno de los tres ejes principales, $\vec{t}$ es paralelo a $\vec{n}$ y por tanto, no hay componentes cortantes. La tensión normal transmitida a lo largo del elemento se obtiene a partir de la longitud r de $\vec{r}$ como $\tau = 1/r^2$. Analíticamente, $\tau = \sum_{ij} \tau_{ij} n_i n_j$ o, si todas las componentes están dirigidas según los ejes principales:

$$\tau = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \qquad (2\text{–}18)$$

2.8. Casos particulares

Estudiaremos ahora algunos casos particulares, casi todos ellos referidos a los ejes principales, y los círculos de Mohr asociados.† En otros ejes las componentes del tensor variarán

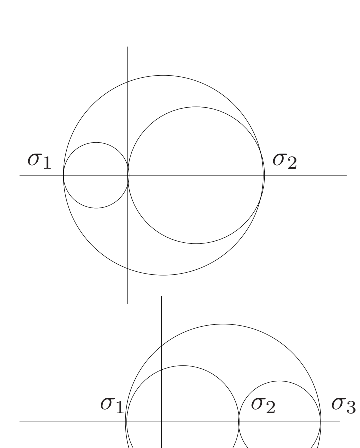
1. **Tensión uniaxial**, por ejemplo, una barra que tiene algo colgado de su extremo inferior. El tensor de tensiones correspondiente a este caso es:



$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2\text{–}19)$$

en ejes principales. En otros ejes tendrá una forma distinta.

2. **Tensión biaxial** (estado plano de tensión). Por ejemplo, una lámina sobre la que actúan exclusivamente fuerzas contenidas en el plano de la lámina. El tensor de tensiones toma la forma:



$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2\text{–}20)$$

y sus círculos de Mohr se muestran en la figura, suponiendo $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$.

3. **Tensión triaxial** (caso general).

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \qquad (2\text{–}21)$$

σ_1 σ_2 σ_3

Dependiendo del signo relativo de las σ_i, se clasifican en varios tipos. Cuando todas tienen el mismo signo, se tiene una tensión triaxial del *tipo elíptico*. Cuando las componentes tienen distintos signos, se tiene una tensión triaxial del *tipo hiperbólico*. En la figura 2–7 se muestran estos tipos de tensiones triaxiales.



† Valores y signos de los autovalores están tomados para facilitar su representación.

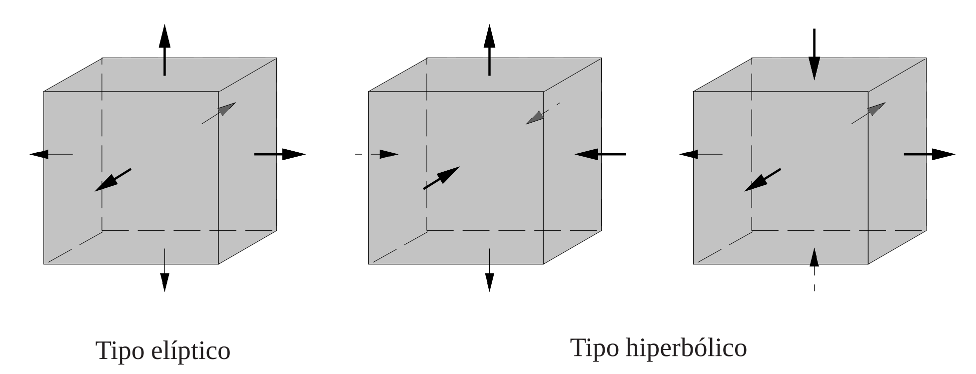


Figura 2–7: Distintos tipos de tensiones triaxiales. Cuando todas las tensiones principales tienen el mismo signo se dice que se tiene un estado de tensiones de tipo elíptico, mientras que cuando tienen distintos signos se dice que el estado de tensiones es de tipo hiperbólico.

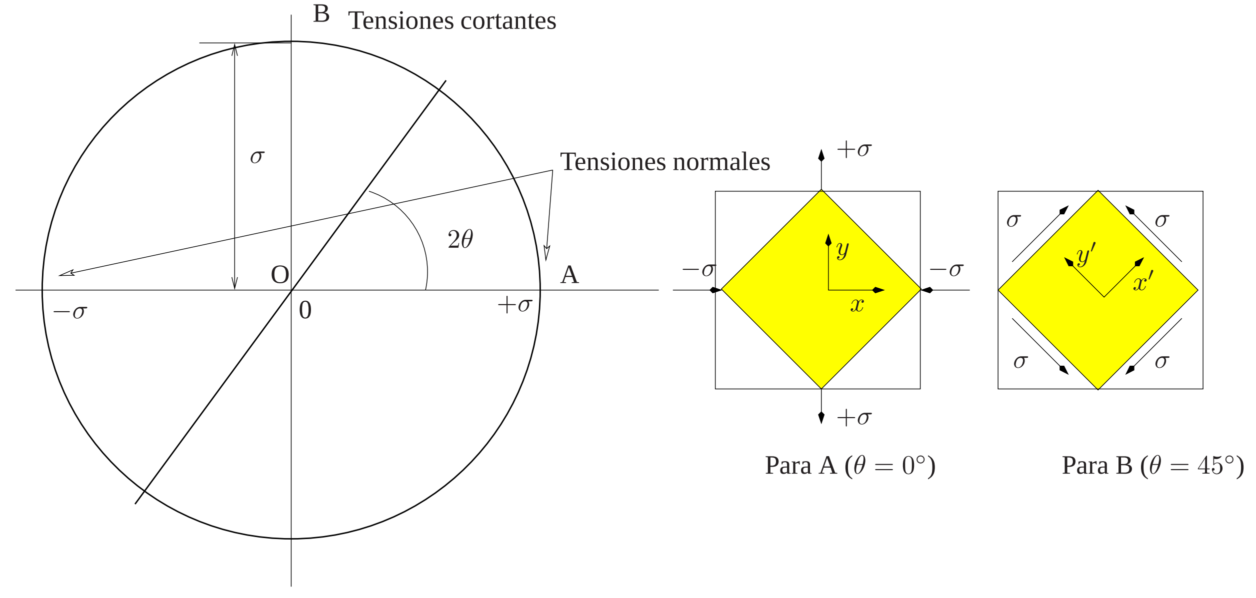


Figura 2–8: Esfuerzo cortante representado en ejes principales y en ejes rotados $45°$ respecto de los mismos en el plano principal asociado.

Un caso particular de tensión triaxial de especial importancia tiene lugar cuando los valores de las σ_i son iguales. Este caso es el denominado tensión hidrostática, tomando el tensor de tensiones la forma:

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\mathbb{I} \quad \text{o} \quad -p\delta_{ij} \tag{2–22}$$

El tensor hidrostático se mantiene diagonal con las mismas componentes con independencia del sistema de ejes escogido, no se transforma frente a la rotación. Esto implica que el círculo de Mohr correspondiente a un estado hidrostático de tensiones se reduce a un punto al coincidir las tres tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3.

4. **Esfuerzo cortante**. Aparece por ejemplo, al retorcer una varilla larga, o al cortar una chapa metálica con una cizalla. En este caso, el tensor de tensiones toma, en ejes principales, la siguiente forma (para tensión en el plano xy).

$$\begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2–23}$$

Si rotamos $45°$ alrededor del eje principal 3 (z), las componentes normales desaparecen y sólo quedan componentes cortantes del tensor de tensiones

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2–24}$$

El estado de tensiones descrito por (2–23) y (2–24) es exactamente el mismo, pero representado en dos sistemas de coordenadas distintos, xy la (2–23) y $x'y'$ la (2–24). Nótese que éste es el mismo caso que se estudia en la sección 1.6.2.

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

